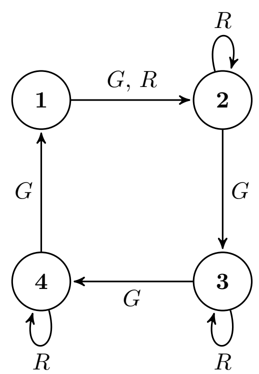
Alle wegen leiden naar automaten

Sam van Gool – Institute for Logic, Language and Computation – S.J.vanGool@uva.nl
6 april 2018 – Congres "Leve de Wiskunde!" – Universiteit of Amsterdam

Opgaven uit de lezing

Verzeker je kamernummer in het doolhof



- Je kunt de kamers niet van elkaar onderscheiden.
- Je weet niet in welke kamer je begint.
- Je mag *negen keer* een deur doorgaan.
- Als je na die negen keer weet in *welk kamernummer* je je bevindt, win je een pot met goud.

Vraag 1. Welke volgorde van rode/groene deuren kies je? In welke kamer bevind je je uiteindelijk?

Vraag 2. Kun je ook synchroniserende woorden van lengtes 16 en 25 vinden voor doolhoven uit de lezing met 5 en 6 kamers? Herken je een patroon in de synchroniserende woorden?

Verifieer de geldigheid van een e-mailadres

In de lezing noemden we een e-mailadres *geldig* dan en slechts dan als:

- het eerst minstens één alfanumeriek teken (t) bevat, en mogelijk meer tekens (t) en punten (.);
- daarna op een gegeven moment een apenstaartje (@);
- daarna minstens één alfanumeriek teken (t), gevolgd door een punt (.), een teken (t), en daarna mogelijk nog een aantal tekens en/of punten.

In e-mailadressen mag echter ook geen punt (.) *direct voorafgaand aan* het apenstaartje staan. De automaat uit de lezing accepteert zulke e-mailadressen helaas wel.

Vraag 1. Kun je de automaat uit de lezing aanpassen zodat hij ook e-mailadressen met een punt (.) direct voor het apenstaartje (@) afwijst?

Vraag 2. Kun je nog meer regels verzinnen die dichter bij de werkelijkheid komen? En bij die regels behorende automaten?

Verdiepingsopgaven

Pompen en niet-reguliere talen

Voor iedere reguliere taal bestaat er een zogenaamd *pomp-getal* $m \geq 1$; dat wil zeggen, als een bepaald woord w van lengte minstens m in de taal zit, dan kan w opgesplitst worden in drie delen, $w = xyz$, zodat het begin-stuk xy lengte hoogstens m heeft en zodat iedere 'gepompte versie' van w, namelijk ieder woord van de vorm $xyy \dots yz$, ook in de taal zit. Je mag y hier zo vaak herhalen als je wil, en y mag niet leeg zijn.

(a) Wat is een pomp-getal voor de taal $t[tt]^*$, 'woorden met een oneven aantal tekens'?

(b) Kun je pomp-getallen vinden voor de andere reguliere talen uit de lezing?

(c) Kun je uitleggen waarom er voor reguliere talen altijd een pomp-getal moet bestaan?

(d) Hoe kun je de eigenschap van pomp-getallen gebruiken om te bewijzen dat de taal van 'wachtwoorden twee keer', d.w.z. de woorden van de vorm $w\texttt{ENT}w$, *niet* regulier is?

Een grens voor synchroniserende woorden

Deze opgave kan je helpen om een bewijs te vinden dat $C(n)$, de maximale lengte van het kortste synchroniserende woord voor een automaat met n toestanden, hoogstens $\dfrac{n^3 - 2n^2 + n}{2}$ is.

(a) We bekijken eerst een automaat met 3 toestanden: $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$. Stel dat w en v woorden zijn zodat $\delta_w(\mathbf{1}) = \delta_w(\mathbf{2})$, en dat v een woord is zodat $\delta_v(\delta_w(\mathbf{2})) = \delta_v(\delta_w(\mathbf{3}))$. Leg uit waarom wv een synchroniserend woord is voor de automaat.

(b) Bekijk nu een automaat met n toestanden $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{n}$. Stel dat $w_1, \dots, w_{n-1}$ woorden zijn zodat $\delta_{w_1}(\mathbf{1}) = \delta_{w_1}(\mathbf{2})$, $\delta_{w_1 w_2}(\mathbf{2}) = \delta_{w_1 w_2}(\mathbf{3})$, $\dots$, $\delta_{w_1 \dots w_{n-1}}(\mathbf{n-1}) = \delta_{w_1 \dots w_{n-1}}(\mathbf{n})$. Laat zien dat $w_1 \dots w_{n-1}$ een synchroniserend woord is voor de automaat.

(c) Concludeer uit (b) dat, als de woorden $w_1, \dots, w_{n-1}$ altijd zo gekozen kunnen worden dat ze van lengte hoogstens N zijn, dan is $C(n)$ hoogstens $(n-1) \cdot N$.

(d) Laat zien dat, in een synchroniseerbare automaat met n toestanden, er voor twee verschillende toestanden q en r altijd een woord w van lengte hoogstens $\binom{n}{2}$ bestaat zo dat $\delta_w(q) = \delta_w(r)$. (Dit is de moeilijkste stap in het bewijs.)

(e) Concludeer uit (c) en (d) dat $C(n) \leq \dfrac{n^3 - 2n^2 + n}{2}$.

Slides met hints en bronnen komen online te staan op http://www.samvangool.net/ldw2018.pdf
Voor verdere vragen en informatie over de inhoud van deze lezing: S.J.vanGool@uva.nl