

Logique – devoir maison – corrigé

Date limite : 8 avril 2026, 13h59, heure de Paris

Consignes. Vous pouvez utiliser les résultats vus en cours ou dans des questions précédentes, si vous les citez de manière claire et non ambiguë. Les résultats vus en TD ou ailleurs qu'en cours, s'ils sont utilisés, doivent être redémontrés. Seules les notions et notations du cours et du sujet seront admises dans les réponses. Vous pouvez envoyer vos réponses en un unique fichier PDF par mail à svangoool@ens-paris-saclay.fr avec comme sujet [DM logique], suivi par votre nom et prénom, ou les remettre en version papier avant le début du TD du mercredi 8 avril.

Dans tout ce sujet, on utilise la version du calcul des séquents **LJ** donnée au cours 7, et on se restreint à la logique intuitionniste *propositionnelle*, **IPC**. Dans toute preuve en calcul des séquents, vous devez annoter les règles conformément aux noms qui y sont donnés.

L'objectif des sections 1 et 2 est de démontrer un théorème de complétude pour **IPC** par rapport aux modèles finis. La section 3 construit un modèle *universel* pour la logique intuitionniste propositionnelle sur un nombre de variables fini.

1 L'algèbre de Lindenbaum

Dans toute cette section, on fixe un ensemble P de variables propositionnelles. On note \mathcal{F} pour l'ensemble de formules propositionnelles avec variables dans P .

Définition A. La relation \preceq sur \mathcal{F} est définie, pour toutes φ, ψ , par

$$\varphi \preceq \psi \text{ si et seulement si } \varphi \vdash_{\mathbf{LJ}} \psi .$$

La relation \equiv sur \mathcal{F} est définie, pour toutes φ, ψ , par $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si $\varphi \preceq \psi$ et $\psi \preceq \varphi$.

Question 1. Montrer que \preceq est réflexive et transitive.

Solution. Pour toute formule φ , on a $\varphi \preceq \varphi$ par la règle d'axiome.

Pour la transitivité, si $\varphi \vdash_{\mathbf{LJ}} \psi$ et $\psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \vartheta$ alors $\varphi \vdash_{\mathbf{LJ}} \vartheta$ par la règle de coupure. \square

Noter qu'il découle de la Question 1 que \equiv est une relation d'équivalence sur \mathcal{F} . Pour $\varphi \in \mathcal{F}$, on note $[\varphi]$ la \equiv -classe de φ .

Définition B. L'*algèbre de Lindenbaum* est le quotient $\mathcal{L} := \mathcal{F}/\equiv$, muni de la relation \leq définie par $[\varphi] \leq [\psi]$ si et seulement si $\varphi \preceq \psi$.

On note qu'il découle de la Question 1 que la relation \leq est un ordre partiel bien défini sur \mathcal{L} .

Question 2. Montrer que, pour toutes $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, $[\varphi \vee \psi]$ est le supremum de $[\varphi]$ et $[\psi]$ dans (\mathcal{L}, \leq) .

Solution. On a $\varphi \vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi \vee \psi$ en utilisant $\mathcal{R}1\vee$ et Ax, et $\psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi \vee \psi$ en utilisant $\mathcal{R}2\vee$ et Ax. Ainsi, $[\varphi \vee \psi]$ est un majorant de $[\varphi], [\psi]$. Pour voir qu'il est le plus petit, soit $\delta \in \mathcal{F}$ tel que $[\varphi] \leq [\delta]$ et $[\psi] \leq [\delta]$. Cela signifie que $\varphi \vdash_{\mathbf{LJ}} \delta$ et $\psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \delta$. Par $\mathcal{L}\vee$, on obtient $\varphi \vee \psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \delta$, donc $[\varphi \vee \psi] \leq [\delta]$, comme requis. \square

Question 3. Montrer que $[\perp]$ est l'élément minimal de (\mathcal{L}, \leq) .

Solution. Pour toute formule φ , on a $\perp \vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi$, en utilisant \mathcal{RW} et Ax. Ainsi, $[\perp] \leq [\varphi]$. \square

On admet le résultat suivant :

Lemme C. Pour toutes $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, $[\varphi \wedge \psi]$ est l'infimum de $[\varphi]$ et $[\psi]$ dans (\mathcal{L}, \leq) , et $[\top]$ est le maximum de (\mathcal{L}, \leq) .

Question 4. Soient φ, ψ, δ des formules. Montrer que $\varphi, \psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \delta$ si et seulement si $\varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \delta$.

Solution. Si $\varphi, \psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \delta$ alors $\varphi, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \delta$ par $\mathcal{L}2\wedge$ puis $\varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \delta$ par $\mathcal{L}1\wedge$ et \mathcal{LX} . Ainsi, par la règle C , $\varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \delta$.

Réciproquement, supposons $\varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \delta$. On remarque que $\varphi, \psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi \wedge \psi$ par $\mathcal{R}\wedge$ et deux règles Ax. En appliquant la règle de coupure, on obtient $\varphi, \psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \delta$. \square

Question 5. Montrer que (\mathcal{L}, \leq) est une algèbre de Heyting.

Solution. D'après les questions précédentes et les faits admis, (\mathcal{L}, \leq) est un treillis borné. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$. On montre que $[\varphi \rightarrow \psi]$ est le maximum de $B := \{[\gamma] \mid \gamma \in \mathcal{F}, [\gamma] \wedge [\varphi] \leq [\psi]\}$.

On note d'abord que $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{LJ}} \psi$, en appliquant $(\mathcal{L}\rightarrow)$ aux axiomes $\varphi \vdash \varphi$ et $\psi \vdash \psi$. Par la Question 4, on obtient $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{LJ}} \psi$. Comme $[\varphi \rightarrow \psi] \wedge [\varphi] = [\varphi] \wedge [\varphi \rightarrow \psi] = [\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)]$ par le Lemme C, on en déduit que $[\varphi \rightarrow \psi] \in B$.

Soit $\gamma \in \mathcal{F}$ tel que $[\gamma] \wedge [\varphi] \leq [\psi]$. Par le Lemme C, $[\gamma \wedge \varphi] \leq [\psi]$. Cela signifie que $\gamma \wedge \varphi \vdash_{\mathbf{LJ}} \psi$. Par la Question 4, $\gamma, \varphi \vdash_{\mathbf{LJ}} \psi$. En appliquant $\mathcal{R}\rightarrow$, on obtient $\gamma \vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi \rightarrow \psi$. \square

2 La propriété de modèle fini

Définition D. Une fonction $h: A \rightarrow B$ entre treillis bornés est un *homomorphisme de treillis bornés* si $h(\perp_A) = \perp_B$, $h(\top_A) = \top_B$, et, pour tous $a_1, a_2 \in A$, $h(a_1 \vee_A a_2) = h(a_1) \vee_B h(a_2)$ et $h(a_1 \wedge_A a_2) = h(a_1) \wedge_B h(a_2)$.

Un homomorphisme de treillis bornés est un *plongement* si, pour tous $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \leq_A a_2$ si et seulement si $h(a_1) \leq_B h(a_2)$.

Question 6. Soit $h: A \rightarrow B$ un plongement de treillis bornés, et soient $a_0, a_1, a_2 \in A$ tels que $h(a_0) = \max\{b \in B \mid h(a_1) \wedge b \leq h(a_2)\}$. Montrer que $a_0 = \max\{a \in A \mid a_1 \wedge a \leq a_2\}$.

Solution. On a $h(a_1 \wedge a_0) = h(a_1) \wedge h(a_0) \leq h(a_2)$, donc $a_1 \wedge a_0 \leq a_2$ puisque h est un plongement. De plus, si $a \in A$ vérifie $a_1 \wedge a \leq a_2$, alors $h(a_1) \wedge h(a) = h(a_1 \wedge a) \leq h(a_2)$, donc $h(a) \leq h(a_0)$, et on obtient $a \leq a_0$. \square

Définition E. Un treillis borné A est *distributif* si, pour tous $a, b, c \in A$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Question 7. Soit A un treillis borné.

- (a) Montrer que, si A est une algèbre de Heyting, alors A est distributif.
- (b) Montrer que, si A est fini et distributif, alors A est une algèbre de Heyting.

Solution. (a) Supposons que A soit une algèbre de Heyting. Alors $b \vee c \leq a \rightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$, car $b \leq a \rightarrow (a \wedge b)$ et $c \leq a \rightarrow (a \wedge c)$. Ainsi, $a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. L'inégalité réciproque, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$, est vraie dans tout treillis, puisque $a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c)$ et $a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$. (b) Supposons que A soit fini et distributif. Soient $a, b \in A$. L'élément $d := \bigvee\{c \mid a \wedge c \leq b\}$ existe car A est fini. Montrons que $a \wedge d \leq b$. En effet,

$$a \wedge \left(\bigvee\{c \mid a \wedge c \leq b\} \right) = \bigvee\{a \wedge c \mid a \wedge c \leq b\} \leq b.$$

Ainsi, $d = \max\{c \mid a \wedge c \leq b\}$. \square

Définition F. Pour toute formule propositionnelle φ , l'ensemble $\text{Subf}(\varphi)$ des *sous-formules* de φ est défini inductivement comme suit :

- pour toute variable propositionnelle p , $\text{Subf}(p) := \{p\}$;
- $\text{Subf}(\perp) := \{\perp\}$;
- pour tout $\circ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$ et toutes formules φ_1, φ_2 ,

$$\text{Subf}(\varphi_1 \circ \varphi_2) := \{\varphi_1 \circ \varphi_2\} \cup \text{Subf}(\varphi_1) \cup \text{Subf}(\varphi_2) .$$

Définition G. Soit L un treillis borné et $S \subseteq L$ un sous-ensemble. Le *sous-treillis borné engendré* par S est le plus petit sous-ensemble A de L tel que $S \subseteq A$, $\perp \in A$, $\top \in A$, et, pour tous $a, b \in A$, $a \vee b \in A$ et $a \wedge b \in A$.

Pour le reste de cette section, on fixe une formule propositionnelle φ , on note P l'ensemble (fini) des variables propositionnelles apparaissant dans φ , et on écrit $P = \{p_1, \dots, p_k\}$. On note \mathcal{L} l'algèbre de Lindenbaum pour l'ensemble de formules propositionnelles avec variables dans cet ensemble P , et on définit A_φ comme le sous-treillis borné de \mathcal{L} engendré par l'ensemble $\{[\psi] \mid \psi \in \text{Subf}(\varphi)\}$.

Question 8. Montrer que A_φ a au plus 2^{2^n} éléments, où $n = |\text{Subf}(\varphi)|$, et en déduire que A_φ est une algèbre de Heyting.

Solution. Notons S l'ensemble $\{[\psi] \mid \psi \in \text{Subf}(\varphi)\}$. Alors $|S| \leq n$. Posons $A' := \{\bigvee_{T \in \mathcal{T}} \bigwedge T \mid \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(S)\}$. Alors A' est un sous-treillis borné : $\perp \in A'$ en prenant $\mathcal{T} = \emptyset$, $\top \in A'$ en prenant $\mathcal{T} = \{S\}$, et A' est stable par \vee en prenant des unions. Pour la stabilité par \wedge , soient $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{P}(S)$. En utilisant la distributivité dans \mathcal{L} , on a

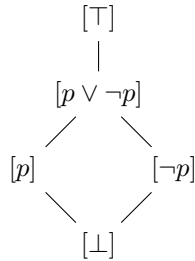
$$\left(\bigvee_{T \in \mathcal{T}_1} \bigwedge T \right) \wedge \left(\bigvee_{T' \in \mathcal{T}_2} \bigwedge T' \right) = \bigvee_{(T, T') \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2} \left(\bigwedge T \wedge \bigwedge T' \right),$$

qui appartient encore à A' en prenant $\mathcal{T} := \{T \cup T' \mid (T, T') \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2\}$. De plus, A' contient S : si $s \in S$, alors $s = \bigvee_{T \in \mathcal{T}} \bigwedge T$ avec $\mathcal{T} = \{\{s\}\}$. Ainsi, $A_\varphi \subseteq A'$, et clairement $|A'| \leq 2^{2^n}$.

Par la Question 5, \mathcal{L} est une algèbre de Heyting, donc distributive d'après la Question 8(a). Ainsi A_φ , étant un sous-treillis borné de \mathcal{L} , est aussi distributif. Par la Question 8(b), A_φ est une algèbre de Heyting. \square

Question 9. Dessiner un diagramme du poset A_φ dans le cas $\varphi = p \vee \neg p$. En déduire que les opérations \rightarrow_{A_φ} et $\rightarrow_{\mathcal{L}}$ ne coïncident pas nécessairement : exhiber des éléments $b_1, b_2 \in A_\varphi$ tels que $b_1 \rightarrow_{A_\varphi} b_2 \neq b_1 \rightarrow_{\mathcal{L}} b_2$.

Solution. Le poset A_φ est représenté ci-dessous :



Considérons $b_1 := [\neg p]$, $b_2 := [p]$. Alors $b_1 \rightarrow_B b_2 = [\perp]$, mais $b_1 \rightarrow_{\mathcal{L}} b_2 = [\neg p \rightarrow p] \neq [\perp]$, car il existe un modèle de $\neg p \rightarrow p$ (par exemple, un seul noeud où p est vrai). \square

On rappelle la définition suivante du cours.

Définition H. Soit A une algèbre de Heyting et $f : P \rightarrow A$ une fonction. On définit inductivement $\bar{f}(\varphi) \in A$: pour $p \in P$ et $\varphi, \psi \in \text{Form}(P)$,

- $\bar{f}(p) := f(p)$,
- $\bar{f}(\varphi \vee \psi) := \bar{f}(\varphi) \vee_A \bar{f}(\psi)$;
- $\bar{f}(\perp) := \perp_A$;
- $\bar{f}(\varphi \wedge \psi) := \bar{f}(\varphi) \wedge_A \bar{f}(\psi)$;
- $\bar{f}(\varphi \rightarrow \psi) := \bar{f}(\varphi) \rightarrow_A \bar{f}(\psi)$.

Considérons la fonction $f: P \rightarrow A_\varphi$, qui envoie $p \in P$ sur $[p]$.

Question 10. Montrer que, pour tout $\psi \in \text{Subf}(\varphi)$, on a $\bar{f}(\psi) = [\psi]$. *Indication.* Appliquer la Question 6 à la fonction d'inclusion $A_\varphi \rightarrow \mathcal{L}$.

Solution. Par induction sur ψ . Les cas \perp, \vee, \wedge sont simples car $\perp_A = \perp_{\mathcal{L}}, \vee_A = \vee_{\mathcal{L}}$ et $\wedge_A = \wedge_{\mathcal{L}}$. Traitons le cas \rightarrow . Supposons $\psi = \psi_1 \rightarrow \psi_2$. Posons $a_i := [\psi_i]$ pour $i = 1, 2$, et $a_0 := [\psi]$, qui appartient à A car $\psi \in \text{Subf}(\varphi)$.

Soit $h: A_\varphi \rightarrow \mathcal{L}$ l'inclusion. Alors $h(a_0) = [\psi] = [\psi_1] \rightarrow_{\mathcal{L}} [\psi_2] = h(a_1) \rightarrow_{\mathcal{L}} h(a_2)$.

Par la Question 6, $a_0 = a_1 \rightarrow_{A_\varphi} a_2$. Par hypothèse d'induction, $a_i = \bar{f}(\psi_i)$ pour $i = 1, 2$. Ainsi,

$$[\psi] = \bar{f}(\psi_1) \rightarrow_{A_\varphi} \bar{f}(\psi_2) = \bar{f}(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$$

par définition de \bar{f} . □

Question 11. Supposons que, pour toute algèbre de Heyting finie A et toute fonction $f: P \rightarrow A$, on ait $\bar{f}(\varphi) = \top_A$. Montrer que $\vdash_{\text{LJ}} \varphi$.

Solution. Soit $A := A_\varphi$. Alors A est une algèbre de Heyting finie par la Question 8. Par hypothèse, $\bar{f}(\varphi) = \top_A$, et par la Question 10, $\bar{f}(\varphi) = [\varphi]$. Or $\top_A = [\perp \rightarrow \perp]$. On obtient donc $[\varphi] = [\perp \rightarrow \perp]$. En particulier, $\perp \rightarrow \perp \preceq \varphi$, donc $\perp \rightarrow \perp \vdash_{\text{LJ}} \varphi$. Comme $\vdash_{\text{LJ}} \perp \rightarrow \perp$ (en appliquant $\mathcal{R} \rightarrow$ à un axiome), on obtient par coupure que $\vdash_{\text{LJ}} \varphi$. □

Définition I. Soit A un treillis borné. Un élément $x \in A$ est dit *sup-premier* si $x \neq \perp$ et, pour tous $a, b \in A$, si $x \leq a \vee b$ alors $x \leq a$ ou $x \leq b$. On note $\mathcal{J}(A)$ l'ensemble des éléments sup-premiers de A . On définit l'ordre partiel $\leq_{\mathcal{J}(A)}$ sur $\mathcal{J}(A)$ comme étant la restriction de l'ordre sur A .

Pour (W, \leq) un poset, on rappelle qu'une partie $S \subseteq W$ est *décroissante* si, pour tout $s \in S$ et $w \in W$, si $s \geq w$, alors $w \in S$. On note $\mathcal{D}(W, \leq)$ pour le treillis complet des parties décroissantes de W . Soit A un treillis borné. On définit la fonction $\eta_A: A \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{J}(A), \leq_{\mathcal{J}(A)})$ par, pour tout $a \in A$,

$$\eta_A(a) := \{x \in \mathcal{J}(A) \mid x \leq a\}.$$

Question 12. Montrer que, pour tout treillis borné distributif fini A , la fonction η_A est un plongement surjectif de treillis bornés.

Solution. Pour tout $x \in \mathcal{J}(A)$ et $a, b \in A$, on a $x \leq a \vee b \iff x \leq a$ ou $x \leq b$ et $x \leq a \wedge b \iff x \leq a$ et $x \leq b$. De plus, $x \not\leq \perp$ et $x \leq \top$. Donc η_A est un homomorphisme de treillis bornés.

Pour montrer que η_A est un plongement, soient $a, b \in A$ tels que $a \not\leq b$. Soit x un élément minimal de l'ensemble $\downarrow a \cap (A \setminus \downarrow b)$ (un tel élément existe puisque A est fini). Montrons que $x \in \mathcal{J}(A)$.

D'abord, $x \neq \perp$ car $x \not\leq b$. Si $x \leq c \vee d$, alors $x = x \wedge (c \vee d) = (x \wedge c) \vee (x \wedge d)$ par distributivité. Puisque $x \not\leq b$, on a $x \wedge c \not\leq b$ ou $x \wedge d \not\leq b$. Dans le premier cas, on a $x \wedge c \leq x \leq a$, donc, par minimalité de x dans $\downarrow a \cap (A \setminus \downarrow b)$, on déduit $x \wedge c = x$, i.e., $x \leq c$. L'autre cas est analogue.

Pour la surjectivité, soit $S \subseteq \mathcal{J}(A)$ une partie décroissante. Posons $a := \bigvee S$ et montrons que $\eta_A(a) = S$. Pour tout $x \in \mathcal{J}(A)$, on a $x \leq a \iff$ il existe $s \in S$ tel que $x \leq s$, ce qui est équivalent à $x \in S$ puisque S est décroissant. □

Définition J. On note $\mathbf{2}$ l'ensemble $\{0, 1\}$, et $\mathbf{2}^k$ désigne l'ensemble des suites binaires de longueur k . On note \sqsubseteq l'ordre partiel point-à-point sur $\mathbf{2}^k$, c'est-à-dire que $c \sqsubseteq c'$ ssi $c(i) \leq c'(i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, et on note \sqsubset l'ordre partiel strict correspondant.

Un k -modèle est un triplet $\mathcal{M} = (W, \leq, V)$, où (W, \leq) est un poset et $V : (W, \leq) \rightarrow (\mathbf{2}^k, \sqsubseteq)$ est une fonction croissante. Un k -modèle $\mathcal{M} = (W, \leq, V)$ est *fini* si l'ensemble W est fini.

Un k -modèle s'interprète de manière naturelle comme modèle d'**IPC** sur l'ensemble de propositions P : pour $w \in W$ et $1 \leq j \leq k$, on définit $\mathcal{M}, w \models p_j$ ssi le $j^{\text{ième}}$ bit de $V(w)$ vaut 1. On note que la condition de croissance sur V garantit que cette définition est persistente. Les clauses inductives de la définition de $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sont les mêmes que celles données en [cours 7](#).

Question 13. Montrer : si pour tout k -modèle enraciné fini $\mathcal{M} = (W, \leq, V, w_0)$, on a $\mathcal{M}, w_0 \models \varphi$, alors $\vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi$.

Solution. Soit $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ l'ensemble des variables propositionnelles apparaissant dans φ . On utilise la Question 11 pour montrer que $\vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi$. Soit A une algèbre de Heyting finie et $f : P \rightarrow A$ une fonction. Définissons un k -modèle $\mathcal{M}_A := (\mathcal{J}(A), \leq_{\mathcal{J}(A)}, V_f)$, où, pour $x \in \mathcal{J}(A)$ et $1 \leq i \leq k$, $V_f(x)_i := 1$ ssi $x \leq f(p_i)$. Soit $h : P \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{J}(A))$ la fonction définie, pour $1 \leq i \leq k$, par $h(p_i) := \{x \in \mathcal{J}(A) \mid \mathcal{M}_A, x \models p_i\}$. On observe alors que la définition de \models implique que, pour toute formule ψ , $\bar{h}(\psi) = \{x \in \mathcal{J}(A) \mid \mathcal{M}_A, x \models \psi\}$. Or, pour tout $p \in P$, $h(p) = \eta_A(f(p))$, donc pour toute formule ψ , $\eta_A(\bar{f}(\psi)) = \bar{h}(\psi)$, où on utilise les définitions de \bar{f} et de \bar{h} , et le fait que η_A est un homomorphisme. Or, $\bar{h}(\varphi) = \{x \in \mathcal{J}(A) \mid \mathcal{M}_A, x \models \varphi\} = \eta_A(\top)$ par hypothèse. Puisque η_A est un plongement, on obtient $\bar{f}(\varphi) = \top_A$. \square

3 Le modèle universel

Dans toute cette section, on fixe $k \geq 1$ et $P := \{p_1, \dots, p_k\}$ un ensemble de variables propositionnelles. On note \mathcal{F} pour l'ensemble de toutes les formules propositionnelles à variables dans P . L'objectif de cette section est de construire un modèle *universel* pour la logique **IPC** sur l'ensemble de propositions P .

Rappelons qu'une *antichaîne* dans un poset (G, \leq) est un sous-ensemble S de G tel que, pour tous $s, s' \in S$, si $s \leq s'$ alors $s = s'$.

Définition K. On définit une suite de posets (G_i, \leq_i) , pour $i \in \mathbb{N}$.

On définit $G_0 := \{(\emptyset, c) \mid c \in \mathbf{2}^k\}$, et $(\emptyset, c) \leq_0 (\emptyset, c')$ ssi $c = c'$. Par convention, on pose aussi $G_{-1} := \emptyset$ et $\leq_{-1} := \emptyset$.

Pour tout $i \geq 0$, G_{i+1} sera l'union disjointe de G_i et un sous-ensemble de $\mathcal{P}(G_i) \times \mathbf{2}^k$. Pour $(U, c) \in \mathcal{P}(G_i) \times \mathbf{2}^k$, on appelle c la *couleur* de (U, c) .

Pour tout $i \geq 0$, on dit qu'une antichaîne $U \subseteq G_i$ est *nouvelle* (au niveau i) si $U \not\subseteq G_{i-1}$. Notons qu'une antichaîne nouvelle est non-vide. Soit $U \subseteq G_i$ une antichaîne nouvelle et soit $c \in \mathbf{2}^k$. On dit que c est *bon pour* U si, pour tout $(U', c') \in U$, on a $c \sqsubseteq c'$, et, si U est un singleton, alors $c \sqsubset c'$, où c' est la couleur de l'unique élément de U .

On définit

$$N_i := \{(U, c) \in \mathcal{P}(G_i) \times \mathbf{2}^k \mid U \text{ une antichaîne nouvelle au niveau } i \text{ et } c \text{ bon pour } U\},$$

$$G_{i+1} := G_i \sqcup N_i,$$

et on définit \leq_{i+1} comme la fermeture réflexive transitive de la relation

$$\leq_i \cup \{((U, c), (U', c')) \in N_i \times G_i \mid (U', c') \in U\}.$$

Enfin, on définit un k -modèle $\mathcal{G} = (G, \leq, V_G)$. On pose $G := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i$ et $\leq := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \leq_i$. Pour tout $(U, c) \in G$, on définit $V_G((U, c)) := c$.

Les posets G_0, G_1, G_2 dans le cas $k = 1$ sont représentés sur la Figure 1.

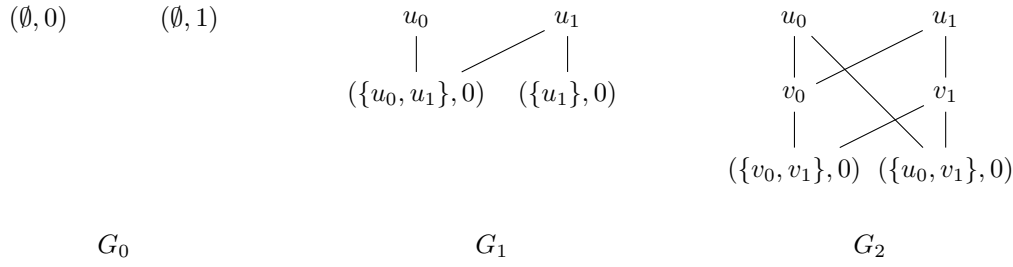
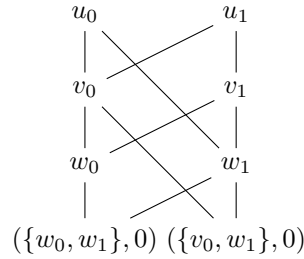


FIGURE 1 – Les posets G_0, G_1, G_2 dans le cas $k = 1$. Ici, on écrit $u_0 := (\emptyset, 0)$, $u_1 := (\emptyset, 1)$, $v_0 := (\{u_0, u_1\}, 0)$ et $v_1 := (\{u_1\}, 0)$.

Question 14. Dessiner G_3 dans le cas $k = 1$. Calculer le nombre d'éléments de G_1 dans le cas $k = 2$.

Solution. Le poset G_3 :



Dans le cas $k = 2$, G_0 a $2^2 = 4$ éléments. Dans G_1 , on ajoute $2^4 - 2$ éléments de couleur 00 (un pour tout sous-ensemble de G_0 sauf \emptyset et $\{00\}$). On ajoute 2 éléments de couleur 01, correspondant aux antichaînes $\{01, 11\}$ et $\{11\}$, et, par un argument symétrique, 2 éléments de couleur 10. On ajoute aucun élément de couleur 11. Au total G_1 a $4 + 2^4 - 2 + 2 + 2 = 22$ éléments. \square

Définition L. Soient $\mathcal{M}_1 = (W_1, \leq_1, V_1)$ et $\mathcal{M}_2 = (W_2, \leq_2, V_2)$ deux k -modèles. Un *morphisme* de \mathcal{M}_1 vers \mathcal{M}_2 est une fonction $f: W_1 \rightarrow W_2$ telle que les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. pour tous $w, w' \in W_1$, si $w \leq_1 w'$ alors $f(w) \leq_2 f(w')$;
2. pour tout $w \in W_1$ et tout $u' \in W_2$, si $f(w) \leq_2 u'$, alors il existe $u \in W_1$ tel que $w \leq_1 u$ et $f(u) = u'$;
3. pour tout $w \in W_1$, $V_1(w) = V_2(f(w))$.

Question 15. Soit $f: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ un morphisme entre k -modèles. Montrer que, pour toute formule $\varphi \in \mathcal{F}$ et tout nœud w de \mathcal{M}_1 , on a $\mathcal{M}_1, w \models \varphi$ si et seulement si $\mathcal{M}_2, f(w) \models \varphi$.

Solution. Pour $i = 1, 2$, soit h_i la fonction qui associe à une formule φ le sous-ensemble de \mathcal{M}_i $h_i(\varphi) := \{x \in W_i \mid \mathcal{M}_i, x \models \varphi\}$. On souhaite montrer que $h_1 = f^{-1} \circ h_2$. La propriété (3) de la définition de morphisme de modèles dit précisément que h_1 et $f^{-1} \circ h_2$ coïncident sur les variables propositionnelles. Aussi, par la définition de la sémantique, h_1 et h_2 préservent tous les opérateurs logiques. On pourra donc conclure si on montre que f^{-1} préserve également tous les opérateurs logiques. Il est clair que f^{-1} est un homomorphisme de treillis bornés. Montrons aussi que $f^{-1}: \mathcal{D}(W_2) \rightarrow \mathcal{D}(W_1)$ préserve l'opération \rightarrow . Soient $U, V \in \mathcal{D}(W_2)$ et $w \in W_1$. Alors

$$w \in f^{-1}(U \rightarrow V) \iff \text{pour tout } w' \in W_1 \text{ tel que } w \leq_1 w', \text{ si } f(w') \in U \text{ alors } f(w') \in V$$

et

$$w \in f^{-1}(U \rightarrow V) \iff \text{pour tout } w' \in W_1 \text{ tel que } f(w) \leq_2 w', \text{ si } w' \in U \text{ alors } w' \in V.$$

L'équivalence des deux conditions découle des propriétés (1) et (2) de la définition de morphisme de modèles. \square

Soit (W, \leq) un poset et soient $w, w' \in W$. On écrit $\uparrow w := \{v \in W \mid w < v\}$. Le nœud w' est un *successeur immédiat* de w si $w' \geq w$ et, pour tout $v \in W$, si $w \leq v \leq w'$, alors $v = w'$ ou $v = w$.

Définition M. Soit $\mathcal{M} = (W, \leq, V)$ un k -modèle. Soient $w_1, w_2 \in W$ deux nœuds distincts. On dit que (w_1, w_2) est une *paire réductible* dans \mathcal{M} si $V(w_1) = V(w_2)$ et l'une des conditions suivantes est remplie : (i) $\uparrow w_1 = \uparrow w_2$, ou (ii) w_2 est le seul successeur immédiat de w_1 . Le modèle \mathcal{M} est *réduit* s'il n'existe pas de paire réductible dans \mathcal{M} .

Question 16. Montrer que tout k -modèle fini admet un morphisme vers un k -modèle réduit.

Solution. Par récurrence sur le cardinal du k -modèle. Tout k -modèle à un seul nœud est réduit. Montrons que tout k -modèle non réduit admet un morphisme vers un modèle ayant un élément de moins. Cela suffit, puisque la composition de morphismes est un morphisme.

Soit (w_1, w_2) une paire réductible dans un k -modèle \mathcal{M} . Soit W' le quotient de W obtenu en identifiant w_1 et w_2 ; notons $f: W \rightarrow W'$ l'application quotient, et posons $w_0 := f(w_1) = f(w_2)$. Puisque (w_1, w_2) est une paire réductible, remarquons que, pour tout $u \in W \setminus \{w_1, w_2\}$, on a $w_1 \leq u$ si et seulement si $w_2 \leq u$. Nous définissons \leq' sur W' comme suit, pour $u, v \in W'$:

- si $u \neq w_0$ et $v \neq w_0$, alors $u \leq' v$ si et seulement si $u \leq v$;
- $w_0 \leq' w_0$;
- si $u = w_0$ et $v \neq w_0$, alors $u \leq' v$ si et seulement si $w_1 \leq v$ (et $w_2 \leq v$);
- si $v = w_0$ et $u \neq w_0$, alors $u \leq' v$ si et seulement si $u \leq w_1$ ou $u \leq w_2$.

La relation \leq' est réflexive et transitive.

Nous définissons en outre $V'(u) := V(u)$ pour $u \neq w_0$ et $V'(w_0) := V(w_1)$, ce qui est égal à $V(w_2)$ puisque (w_1, w_2) est une paire réductible.

Nous montrons que f est un morphisme de (W, \leq, V) vers (W', \leq', V') .

(1) Soient $u, v \in W$ tels que $u \leq v$. Si ni u ni v n'appartiennent à $\{w_1, w_2\}$, alors $f(u) = u$ et $f(v) = v$, donc $f(u) \leq' f(v)$ est immédiat. Si u et v appartiennent tous deux à $\{w_1, w_2\}$, alors $f(u) = w_0 = f(v)$. Supposons $u \in \{w_1, w_2\}$ et $v \notin \{w_1, w_2\}$. Puisque $w_1 \leq v$ si et seulement si $w_2 \leq v$, on obtient $w_0 \leq v = f(v)$. Supposons maintenant $u \notin \{w_1, w_2\}$ et $v \in \{w_1, w_2\}$. Alors $u \leq' w_0$ par définition de \leq' .

(2) Soient $u \in W$ et $v' \in W'$ tels que $f(u) \leq' v'$. Supposons d'abord que $v' \neq w_0$. Alors $u \leq v'$ (pour le voir, distinguer selon que $u \in \{w_1, w_2\}$ ou non) et $f(v') = v'$. Supposons maintenant $v' = w_0$. Si $f(u) = w_0$, alors on peut prendre $v := u$. Sinon, $f(u) \neq w_0$, donc, par définition de \leq' , on a soit $u \leq w_1$, soit $u \leq w_2$, et on choisit v en conséquence.

(3) est clair d'après les définitions. \square

Question 17. Montrer que tout k -modèle fini réduit admet un morphisme vers \mathcal{G} .

Solution. Soit \mathcal{M} un k -modèle réduit fini. On définit un morphisme f de \mathcal{M} vers \mathcal{G} par récurrence sur la hauteur, qui possède en outre la propriété suivante : si $f(x) \leq f(x')$, alors $x \leq x'$, et si x est de hauteur n , alors $f(x) \in \mathcal{G}_n$.

Si x est un nœud de hauteur 0 (c'est-à-dire sans successeurs stricts), on pose $f(x) := (\emptyset, V(x))$, l'élément maximal de \mathcal{G} ayant la même couleur que x . Remarquons que si x, x' sont des nœuds de hauteur 0 et que $f(x) \leq f(x')$, alors $f(x) = f(x')$, donc $V(x) = V(x')$, et ainsi $x = x'$, car sinon (x, x') serait une paire réductible.

Supposons que f ait été défini pour tous les nœuds de hauteur $\leq n$, et soit x un nœud de hauteur $n + 1$. Soient x_1, \dots, x_m les successeurs stricts immédiats de x dans \mathcal{M} . Chacun des x_i est de hauteur $\leq n$, donc $f(x_i)$ est déjà défini. De plus, par hypothèse de récurrence, cet ensemble forme une antichaîne dans \mathcal{G} , et au moins un des x_i est de hauteur $= n$, donc cette antichaîne est nouvelle à l'étape n . Nous définissons $f(x) := (f(x_1), \dots, f(x_m), V(x))$, qui appartient à \mathcal{G}_{n+1} . Notons que

$f(x) \neq f(x_i)$: c'est clair si $m \geq 1$, et si $m = 1$ alors on doit avoir $V(x) \neq V(x_1)$, sinon (x, x_1) serait une paire réductible.

Supposons que $f(x) \leq f(x')$. Si x' est de hauteur $\leq n$, alors on a nécessairement $f(x) < f(x')$ puisque $f(x) \in \mathcal{G}_{n+1}$ tandis que $f(x') \in \mathcal{G}_n$. Par conséquent, $f(x_i) \leq f(x')$ pour un certain $1 \leq i \leq m$, et on obtient $x_i \leq x'$ par hypothèse de récurrence. Si x' est de hauteur $n + 1$, alors $f(x) = f(x')$, mais alors x et x' ont les mêmes successeurs immédiats dans \mathcal{M} et la même couleur, donc $x = x'$, car sinon (x, x') serait une paire réductible.

Il est clair par construction que f satisfait les conditions (1) et (3) de la définition des morphismes. Pour la condition (2), supposons que $f(x) \leq u'$. Si $f(x) = u'$, on peut prendre $u := x$, donc supposons $f(x) < u'$. Choisissons $1 \leq i \leq m$ tel que $f(x_i) \leq u'$. Par hypothèse de récurrence, on peut donc choisir $u \in \mathcal{M}$ tel que $x_i \leq u$ et $f(u) = u'$. \square

Question 18. Soit $\varphi \in \mathcal{F}$. Montrer que $\vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi$ si et seulement si $\mathcal{G}, u \models \varphi$ pour tout $u \in G$.

Solution. D'après la Question 13 et la correction (soundness), $\vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi$ si, et seulement si, $\mathcal{M}, w \models \varphi$ pour tout k -modèle enraciné fini \mathcal{M}, w . D'après les Questions 16 et 17, tout k -modèle fini \mathcal{M} admet un morphisme f vers \mathcal{G} . D'après la Question 15, $\mathcal{M}, w \models \varphi$ si, et seulement si, $\mathcal{G}, f(w) \models \varphi$. \square

Question 19. Construire une famille $(\varphi_u)_{u \in G}$ de formules dans \mathcal{F} telle que, pour tout $w \in G$, $\mathcal{G}, w \models \varphi_u$ si et seulement si $u \leq w$.

Indication. Par récurrence sur i (Définition K). Dans la récurrence, définir en même temps une famille auxiliaire $(\psi_u)_{u \in G}$ telle que, pour tout $w \in G$, $\mathcal{G}, w \models \psi_u$ si et seulement si $w \not\leq u$.

Solution. Pour un nœud $u = (\emptyset, c)$ de hauteur 0, on définit

$$\varphi_u := \bigwedge_{i \in c^{-1}(1)} p_i \wedge \bigwedge_{i \in c^{-1}(0)} \neg p_i, \quad \psi_u := \neg \varphi_u.$$

Clairement, $u \models \varphi_u$. De plus, si $w \in \mathcal{G}$ et $w \models \varphi_u$, alors w et tous ses successeurs ont la couleur c ; u est le seul nœud de \mathcal{G} ayant cette propriété. On déduit également que $w \models \neg \varphi_u$ si et seulement si w n'a aucun successeur satisfaisant φ_u , si et seulement si $w \not\leq u$.

Pour l'étape de récurrence, soit $u = (U, c)$ avec U une nouvelle antichaine de hauteur n et c une couleur qui est bonne pour U . Écrivons $U = u_1, \dots, u_m$, et définissons

$$N := \{1 \leq i \leq k \mid u \not\models p_i \text{ and } u_j \models p_i \text{ for all } 1 \leq j \leq k\},$$

$$\varphi_u := \bigwedge_{i \in c^{-1}(1)} p_i \wedge \left(\left[\bigvee_{i \in N} p_i \vee \bigvee_{i=1}^m \psi_{u_i} \right] \rightarrow \bigvee_{i=1}^m \varphi_{u_i} \right),$$

$$\psi_u := \varphi_u \rightarrow \bigvee_{i=1}^m \varphi_{u_i}.$$

On peut alors vérifier que ces formules satisfont les spécifications requises, en utilisant l'hypothèse de récurrence et la définition du modèle \mathcal{G} . \square

Question 20. Montrer que, pour tout $u \in G$, $\varphi \in \mathcal{F}$, $\vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi_u \rightarrow \varphi$ si et seulement si $\mathcal{G}, u \models \varphi$.

Solution. Si $\vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi_u \rightarrow \varphi$, alors, puisque $\mathcal{G}, u \models \varphi_u$, on obtient $\mathcal{G}, u \models \varphi$. Réciproquement, si $\not\vdash_{\mathbf{LJ}} \varphi_u \rightarrow \varphi$, par la Question 18, prenons $v \in G$ tel que $\mathcal{G}, v \not\models \varphi_u \rightarrow \varphi$. Soit $w \in G$ tel que $w \geq v$, $\mathcal{G}, w \models \varphi_u$, et $\mathcal{G}, w \not\models \varphi$. Par la Question 19, on a $w \geq u$, et donc, par persistance, $\mathcal{G}, u \not\models \varphi$. \square

Note bibliographique. La preuve algébrique de la propriété de modèles finis est dû à [McKinsey et Tarski 1948](#). Le modèle universel a été découvert plusieurs fois, voir par exemple [Shehtman 1978](#) (en russe, mais avec de belles images) ou [Bellissima 1986](#). Les formules φ_u et ψ_u construites dans la solution de la Question 19 s'appellent les formules de de Jongh, d'après le mathématicien néerlandais Dick de Jongh. Voir par exemple Déf. 2.5.0.8 dans [la thèse de L. Hendriks \(1996\)](#).