

Logique – examen final – corrigé

DER informatique, ENS Paris-Saclay

20 mai 2026, 14h-17h

Sauf mention contraire, vous pouvez utiliser les résultats vus en cours ou dans des questions précédentes, si vous les citez de manière claire et non ambiguë. Les résultats vus en TD ou ailleurs qu'en cours, s'ils sont utilisés, doivent être redémontrés. Seules les notions et notations du cours et du sujet seront admises dans les réponses.

L'examen comporte trois parties et 19 questions. Tout au long de l'examen, \mathcal{L} désigne la signature comportant un symbole de relation binaire, R , et aucun symbole de fonction.

1 Ordres linéaires discrets sans extrémités

Définition A. Soit φ_{OL} la \mathcal{L} -formule suivante :

$$\forall x \forall y \forall z [Rxx \wedge ((Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x = y) \wedge ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) \wedge (Rxy \vee Ryx)] .$$

Un *ordre linéaire* est, par définition, un modèle de φ_{OL} . Un ordre linéaire est appelé *sans extrémités* s'il ne possède ni élément minimal ni élément maximal. Un ordre linéaire sans extrémités est appelé *discret* si tout élément possède un successeur et un prédécesseur immédiat. On définit *la théorie des ordres linéaires discrets sans extrémités* comme étant l'ensemble des \mathcal{L} -formules closes qui sont valides dans tous les ordres linéaires discrets sans extrémités.

Question 1. Donner une axiomatisation finie de la théorie des ordres linéaires discrets sans extrémités.

Solution. Soit $S(x, y)$ la formule

$$xRy \wedge \neg(x = y) \wedge \forall z((xRz \wedge zRy) \rightarrow (x = z \vee z = y))$$

qui exprime que y est successeur immédiat de x , et que x est prédécesseur immédiat de y . En utilisant la notation $x < y$ introduit ci-dessous, on peut écrire $S(x, y)$ de manière équivalente et plus succincte : $x < y \wedge \forall z(x < z \rightarrow yRz)$.

Une axiomatisation finie de la théorie est

$$\varphi_{OL} \wedge \forall x \exists y S(x, y) \wedge \forall x \exists y S(y, x) .$$

Note. φ_{OL} exprime entre autres que R est réflexif, donc R est l'ordre *non-strict*. En particulier, φ_{OL} implique $\forall x \exists y Rxy$, et cette dernière formule n'exprime donc pas que l'ordre n'a pas d'élément maximal. Une formule qui exprime correctement qu'il n'y a pas d'élément maximal est :

$$\forall x \exists y (Rxy \wedge \neg(x = y)),$$

ou, de manière équivalente (sous l'hypothèse φ_{OL}), $\neg \exists x \forall y (Ryx)$. Ces formules sont conséquences de l'axiomatisation donnée ci-dessus. \square

Rappelons que, pour $p, n \in \mathbb{N}$, \sim_p désigne la relation d'équivalence sur les structures n -pointées qui relie \mathcal{A}, \bar{a} à \mathcal{B}, \bar{b} si la relation $\{(a_i, b_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ est un p -isomorphisme. On admet :

Théorème B. Pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ et pour toutes \mathcal{L} -structures n -pointées \mathcal{A}, \bar{a} et \mathcal{B}, \bar{b} , les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{A}, \bar{a} \sim_p \mathcal{B}, \bar{b}$,
2. le joueur 2 possède une stratégie gagnante dans le jeu d'Ehrenfeucht–Fraïssé à p tours sur \mathcal{A}, \bar{a} et \mathcal{B}, \bar{b} ,
3. \mathcal{A}, \bar{a} et \mathcal{B}, \bar{b} satisfont les mêmes formules à n variables libres de rang de quantification $\leq p$.

Question 2. Montrer que $(\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}}) \sim_2 (\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$.

Solution. Une stratégie gagnante pour le joueur 2 consiste à imiter l'ordre dans l'autre structure. Plus précisément, au premier coup, le joueur 2 peut toujours répondre avec 0. Après le deuxième coup du joueur 1, on a soit (a_1, a_2) dans \mathbb{Z} , soit (b_1, b_2) dans \mathbb{Q} . On traite le premier cas, le second cas étant similaire. Si $a_1 = a_2$, le joueur 2 répond $b_2 := b_1$. Si $a_1 < a_2$, le joueur 2 répond $b_2 := b_1 - 1$. Si $a_1 > a_2$, le joueur 2 répond $b_2 := b_1 + 1$. \square

Question 3. Montrer que toute axiomatisation du premier ordre de la théorie des ordres linéaires discrets sans extrémités contient une formule de rang de quantification ≥ 3 .

Solution. Let Γ be any set of first-order sentences of quantifier rank ≤ 2 . Suppose that all discrete linear orders are models of Γ . Then in particular \mathbb{Z} is a model of Γ . By Question 2, \mathbb{Q} is then also a model of Γ . But \mathbb{Q} is not discrete, so Γ does not capture the discrete linear orders.

Note. It is not relevant for this question that $\mathbb{Z} \not\sim_3 \mathbb{Q}$, all that matters is $\mathbb{Z} \sim_2 \mathbb{Q}$. \square

Dans le reste de cette partie, pour $\mathcal{A} = (A, R^A)$ un ordre linéaire et $a, b \in A$, on utilise l'abréviation $a \leq b$ pour $R^A ab$ et $a < b$ pour $R^A ab \wedge \neg(a = b)$. Un n -uplet strictement ordonné dans \mathcal{A} est un n -uplet \bar{a} tel que $a_i < a_{i+1}$ pour tout $1 \leq i < n$.

Définition C. Soit \mathcal{A} un ordre linéaire. Pour tous $a, a' \in A$ tels que $a \leq a'$, on définit $d_{\mathcal{A}}(a, a') \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ comme étant le cardinal de l'ensemble $\{x \in A \mid a \leq x \text{ et } x < a'\}$ si cet ensemble est fini, et ∞ sinon.

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} des ordres linéaires discrets sans extrémités et soit $n \in \mathbb{N}$. Soit \bar{a} un n -uplet strictement ordonné dans \mathcal{A} et soit \bar{b} un n -uplet strictement ordonné dans \mathcal{B} . Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on dit que \bar{a} p -ressemble à \bar{b} si, pour tout $1 \leq i < n$, au moins une des conditions suivantes est satisfaite :

1. $d_{\mathcal{A}}(a_i, a_{i+1}) = d_{\mathcal{B}}(b_i, b_{i+1})$;
2. $d_{\mathcal{A}}(a_i, a_{i+1}) \geq 2^p$ et $d_{\mathcal{B}}(b_i, b_{i+1}) \geq 2^p$.

Question 4. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{A}, \bar{a} \sim_p \mathcal{B}, \bar{b}$, alors \bar{a} p -ressemble à \bar{b} .

Solution. By induction on p . When $p = 0$, property 2 holds since both tuples are strictly ordered. For the induction step, suppose $\bar{a} \sim_{p+1} \bar{b}$. Let $1 \leq i < n$ be arbitrary. We distinguish three cases :

- $d(a_i, a_{i+1}) \geq 2^{p+1}$. Pick $a \in A$ such that $d(a_i, a) = 2^p$. Since

$$d(a_i, a) + d(a, a_{i+1}) = d(a_i, a_{i+1}),$$

we must have $d(a, a_{i+1}) \geq 2^p$. Since $\bar{a} \sim_{p+1} \bar{b}$, pick $b \in B$ such that $\bar{a} \cdot a \mapsto \bar{b} \cdot b$ is a p -isomorphism. By the induction hypothesis, we must have $d(b_i, b) \geq 2^p$ and $d(b, b_{i+1}) \geq 2^p$. Therefore, $d(b_i, b_{i+1}) = d(b_i, b) + d(b, b_{i+1}) \geq 2^{p+1}$.

- $d(a_i, a_{i+1}) \leq 2^{p+1} - 2$. In this case, pick $a \in A$ such that $a_i \leq a < a_{i+1}$, $d(a_i, a) < 2^p$, and $d(a, a_{i+1}) < 2^p$: if $d(a_i, a_{i+1}) < 2^p$ then $a := a_i$ works, and otherwise, we can pick a such that $d(a_i, a) = 2^p - 1$, and note that

$$d(a, a_{i+1}) = d(a_i, a_{i+1}) - d(a_i, a) \leq 2^{p+1} - 2 - (2^p - 1) = 2^p - 1.$$

- Since $\bar{a} \sim_{p+1} \bar{b}$, pick $b \in B$ such that $\bar{a} \cdot a \mapsto \bar{b} \cdot b$ is a p -isomorphism. Let \bar{a}' the strictly ordered tuple containing the elements of $\bar{a} \cdot a$, and \bar{b}' the one for $\bar{b} \cdot b$. Then we still have a p -isomorphism between \bar{a}' and \bar{b}' , so, by the induction hypothesis, \bar{a}' p -resembles \bar{b}' . Since (2) fails, we must have $d(a_i, a) = d(b_i, b)$ and $d(a, a_{i+1}) = d(b, b_{i+1})$.
- $d(a_i, a_{i+1}) = 2^{p+1} - 1$. Pick $a \in A$ such that $d(a_i, a) = 2^p - 1$. We have $d(a, a_{i+1}) = 2^p$. Pick $b \in B$ such that $\bar{a} \cdot a \mapsto \bar{b} \cdot b$ is a p -isomorphism. By the induction hypothesis, $d(b_i, b) = 2^p - 1$ and $d(b, b_{i+1}) \geq 2^p$. We obtain $d(b_i, b_{i+1}) \geq 2^{p+1} - 1$. Towards a contradiction, suppose this inequality were strict, so that $d(b_i, b_{i+1}) \geq 2^{p+1}$. By the same argument as in the first case, we would then obtain $d(a_i, a_{i+1}) \geq 2^{p+1}$, which is the desired contradiction. We conclude that $d(b_i, b_{i+1}) = 2^{p+1} - 1$. \square

Question 5. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, si \bar{a} p -resemble à \bar{b} , alors $\mathcal{A}, \bar{a} \sim_p \mathcal{B}, \bar{b}$.

Solution. By induction on p . The case $p = 0$ is trivial since $\bar{a} \sim_0 \bar{b}$ always holds. Assume \bar{a} $(p+1)$ -resembles \bar{b} . It is clear that $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ is a 0-isomorphism since both tuples are strictly ordered in the same way. We prove the forth condition; the back condition is symmetric. Let $a \in A$ be arbitrary. If $a = a_i$ for some $1 \leq i \leq n$, then we can just choose $b = b_i$, so we may assume that $a \neq a_i$ for all $1 \leq i \leq n$. We distinguish three cases :

- $a < a_1$. If $d(a, a_1) = \infty$, we pick $b \in B$ such that $d(b, b_1) = 2^p$, using that \mathcal{B} does not have a minimum. Otherwise, we pick $b \in B$ such that $d(b, b_1) = d(a, a_1)$.
- $a > a_n$. Symmetric to the previous case.
- For some $1 \leq i < n$, $a_i < a < a_{i+1}$.

We distinguish cases according to the $(p+1)$ -resemblance of \bar{a} and \bar{b} :

1. $d_{\mathcal{A}}(a_i, a_{i+1}) = d_{\mathcal{B}}(b_i, b_{i+1})$.

We can pick b such that $d(b_i, b) = d(a_i, a)$. Then also $d(b, b_{i+1}) = d(a, a_{i+1})$, so the new tuples p -resemble each other, and we are done by induction.

2. $d_{\mathcal{A}}(a_i, a_{i+1}) \geq 2^{p+1}$ and $d_{\mathcal{B}}(b_i, b_{i+1}) \geq 2^{p+1}$.

By the triangle inequality, we must have either $d(a_i, a) \geq 2^p$ or $d(a, a_{i+1}) \geq 2^p$. Say we are in the first case, the second is symmetric. We can now pick b such that $d(b_i, b) = 2^p$. Then also

$$d(b, b_{i+1}) = d(b_i, b_{i+1}) - d(b_i, b) \geq 2^{p+1} - 2^p = 2^p .$$

Thus, the new tuples p -resemble each other and we are done by induction. \square

Question 6. Montrer que la théorie des ordres linéaires discrets sans extrémités est complète.

Solution. We claim that the theory is equal to $\text{Th}(\mathcal{Z})$, which is complete. Clearly $\text{Th}(\mathcal{Z})$ contains the theory of discrete linear orders without endpoints. For the converse, let $\varphi \in \text{Th}(\mathcal{Z})$, and let p be the quantifier rank of φ . Let \mathcal{M} be a discrete linear order without endpoints. Since the empty tuple in \mathcal{Z} p -resembles the empty tuple in \mathcal{M} , the two previous questions show that $\mathcal{Z} \sim_p \mathcal{M}$. In particular, since $\mathcal{Z} \models \varphi$, we get $\mathcal{M} \models \varphi$. \square

Question 7. Montrer que la théorie des ordres linéaires discrets sans extrémités est décidable.

Solution. As seen in the course, this is immediate from the facts that it is complete and has a recursive (even finite) axiomatization. One possible algorithm is to recursively enumerate all conclusions of proofs from the axioms of the theory. For any sentence φ , eventually either φ or $\neg\varphi$ must appear, since the theory is complete.

Note. An interesting alternative solution is to show that the theory has quantifier elimination if one adds countably many binary predicates D_n to the signature, where $D_n(x, y)$ is defined by ' $d(x, y) = n$ ', which can be encoded with a formula. For more information, see the discussion here : <https://math.stackexchange.com/a/2330333>. \square

2 Une classe de cadres non-élémentaire

Dans cette partie et la suivante, on étudiera la *formule de McKinsey* en logique modale,

$$M := \Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p .$$

Rappelons qu'une *cadre* pour la logique modale est la même chose qu'une \mathcal{L} -structure. On note par \mathbb{C}_M la classe des cadres sur lesquelles la formule de McKinsey M est valide. Le but de cette partie est de montrer que la classe \mathbb{C}_M n'est pas élémentaire, au sens de la logique du premier ordre. Considérons le cadre $\mathcal{F} := (W, R)$ pour la logique modale défini par :

$$\begin{aligned} W &:= \{w_0\} \sqcup \{q_n, q_n^+, q_n^- \mid n \in \mathbb{N}\} \sqcup \{s_u \mid u \subseteq \mathbb{N}\}, \\ R &:= \{(w_0, q_n), (q_n, q_n^+), (q_n, q_n^-), (q_n^+, q_n^+), (q_n^-, q_n^-) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(w_0, s_u) \mid u \subseteq \mathbb{N}\} \cup \\ &\quad \{(s_u, q_n^+) \mid u \subseteq \mathbb{N}, n \in u\} \cup \{(s_u, q_n^-) \mid u \subseteq \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \setminus u\} . \end{aligned}$$

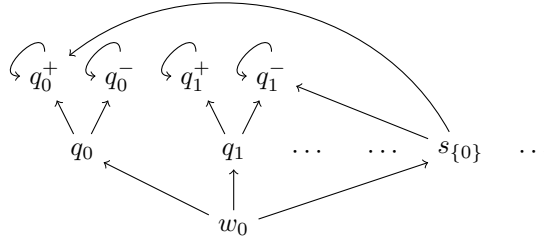


FIGURE 1 – Représentation schématique du cadre \mathcal{F} .

Question 8. Montrer que, pour toute valuation $V : \{p\} \rightarrow \mathcal{P}(W)$, on a $(W, R, V), w_0 \models M$.

Solution. Fix an arbitrary valuation on (W, R) . Suppose $w_0 \models \Box\Diamond p$. For each $n \in \mathbb{N}$, pick some $i(n) \in \{+, -\}$ such that $q_n^{i(n)} \models p$. Let $u := \{n \in \mathbb{N} \mid i(n) = +\}$. Then $s_u \models \Box p$. Thus, $w_0 \models \Diamond\Box p$. \square

On admet le fait suivant :

Lemme D. Pour toute valuation $V : \{p\} \rightarrow \mathcal{P}(W)$, et tout $w \in W \setminus \{w_0\}$, on a $(W, R, V), w \models M$.

On considère maintenant des *sous-modèles élémentaires* de \mathcal{F} dans la signature \mathcal{L} , au sens de la logique du premier ordre. On dira qu'un sous-modèle élémentaire (W', R') de \mathcal{F} est *rempli* si W' contient w_0, q_n, q_n^+ et q_n^- pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 9. Montrer qu'il existe un sous-modèle élémentaire de \mathcal{F} qui est rempli et dénombrable.

Solution. Consider the signature L^+ in which we add constant symbols naming w_0, q_n, q_n^+ and q_n^- for each $n \in \mathbb{N}$. Note that this signature is countable, so there are countably many formulas in the signature. By the Downward Löwenheim Skolem Theorem, there is a countable elementary L^+ -submodel of (W, R) . This model must be filled. \square

Question 10. Soit (W', R') un sous-modèle élémentaire rempli de \mathcal{F} et soit $u \subseteq \mathbb{N}$. Montrer que, si $s_u \in W'$, alors $s_{\mathbb{N} \setminus u} \in W'$.

Solution. Let $\psi(y)$ be the following first-order formula (using s_u as a parameter) :

$$\forall x R(s_u, x) \leftrightarrow \neg R(y, x) .$$

Then $W \models \exists y \psi(y)$, so $W' \models \exists y \psi(y)$. Since $s_{\mathbb{N} \setminus u}$ is the only node t in W such that $W \models \psi(t)$, we get that $s_{\mathbb{N} \setminus u} \in W'$. \square

Question 11. Soit (W', R') un sous-modèle élémentaire rempli dénombrable de \mathcal{F} . Montrer qu'il existe une valuation $V': \{p\} \rightarrow \mathcal{P}(W')$ tel que $(W', R', V'), w_0 \models \neg M$.

Solution. Let $u \subseteq \mathbb{N}$ be such that $s_u \notin W'$; such u exists because W' is countable. Let $V(p) := \{q_n^+ \mid n \in u\} \cup \{q_n^- \mid n \notin u\}$. We claim that $(W', R', V'), w_0 \not\models M$.

We show $(W', R', V'), w_0 \models \Box \Diamond p$. First, it is clear that $q_n \models \Diamond p$ for all $n \in \mathbb{N}$. For $v \subseteq \mathbb{N}$ such that $s_v \in W'$, we must have $v \neq \mathbb{N} \setminus u$ by Question 10. Thus, there exists $n \in \mathbb{N}$ such that either $n \in v \cap u$ or $n \in (\mathbb{N} \setminus v) \cap (\mathbb{N} \setminus u)$. In the first case, $R(s_v, q_n^+)$ and $q_n^+ \models p$, and in the second case, $R(s_v, q_n^-)$ and $q_n^- \models p$.

We now show $(W', R', V'), w_0 \not\models \Diamond \Box p$, i.e., in all successors s of w_0 , we have $s \models \Diamond \neg p$. It is clear that $q_n \models \Diamond \neg p$ for each n . Let $v \subseteq \mathbb{N}$ be such that $s_v \in W'$. Since $v \neq u$, pick $n \in v \setminus u$, say (the other case is symmetric). Then $R(v, q_n^+)$ and $q_n^+ \not\models p$. Thus, $v \not\models p$. \square

Question 12. Montrer que la classe C_M n'est pas élémentaire.

Solution. Suppose Γ is a set of first-order sentences such that $C_M \subseteq \text{Mod}(\Gamma)$. In particular for the frame \mathcal{F} we have $\mathcal{F} \models \Gamma$. By Question 9, pick a countable filled elementary submodel (W', R') of \mathcal{F} . By Question 11, (W', R') is not in C_M , but, being an elementary submodel, it still satisfies Γ . Thus, $\text{Mod}(\Gamma) \not\subseteq C_M$, as required. \square

3 Une algèbre modale et son cadre d'ultrafiltres

Le but de cette partie est de montrer que la formule de McKinsey M peut échouer sur le cadre d'ultrafiltres d'une algèbre modale qui la valide.

Note ajoutée après l'examen. Suite à une erreur dans la dernière question, on n'atteint pas tout à fait cet objectif; voir la note après la question 19.

On appelle un sous-ensemble $u \subseteq \mathbb{N}$ *cofini* si $\mathbb{N} \setminus u$ est fini. Soit $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la collection des sous-ensembles de \mathbb{N} qui sont finis ou cofinis. On admet que A est une algèbre de Boole pour les opérations ensemblistes habituelles. Définissons, pour tout $u \in A$,

$$\Diamond u := \{x \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } y \in u \text{ tel que } x < y\},$$

$$\text{et } \Box u := \mathbb{N} \setminus (\Diamond(\mathbb{N} \setminus u)).$$

Question 13. Montrer que A est stable par \Diamond et \Box , c'est-à-dire que, pour tout $u \in A$, on a $\Diamond u \in A$ et $\Box u \in A$.

Solution. It suffices to prove the fact about \Diamond since we already know that A is closed under complement and $\Box = \neg \Diamond \neg$.

Let $u \in A$. If u is finite, then so is $\Diamond u$, since all of its elements are $\leq \max(u) - 1$. If u is cofinite then $\Diamond u = \mathbb{N}$, which is also cofinite. \square

Question 14. Montrer que l'algèbre modale (A, \Box) valide la formule de McKinsey, c'est-à-dire que, pour tout $u \in A$, on a $\Box \Diamond u \rightarrow \Diamond \Box u = \mathbb{N}$.

Solution. Let $u \in A$ be arbitrary.

If u is finite, then $\Diamond u$ is finite. Therefore $\Box \Diamond u = \emptyset$, and $\Box \Diamond u \rightarrow v = \mathbb{N}$ for any v .

If u is cofinite, let m be the maximum of $\mathbb{N} \setminus u$. Then $\Diamond \neg u$ is the set of numbers $\leq m - 1$. Thus $\Box u$ is the set of numbers $\geq m$. It follows that $\Diamond \Box u = \mathbb{N}$, and thus $v \rightarrow \Diamond \Box u = \mathbb{N}$ for any v . \square

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $\underline{n} := \{a \in A \mid n \in a\}$, et définissons $\underline{\infty}$ comme l'ensemble des sous-ensembles cofinis de \mathbb{N} .

Question 15. Montrer que, pour tout ultrafiltre principal x de A , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \underline{n}$.

Solution. Let x be a principal ultrafilter. Pick $a \in A$ such that $x = \uparrow a$. Since x is proper, $a \neq \emptyset$. Pick $n \in a$. We have either $\{n\} \in x$ or $\mathbb{N} \setminus \{n\} \in x$, since x is an ultrafilter. However, the second case is impossible because $a \not\subseteq \mathbb{N} \setminus \{n\}$ and $x = \uparrow a$. Thus, $\{n\} \in x$. Also, $\{n\} \subseteq a$, so $\{n\} = a$, and we conclude $x = \uparrow\{n\} = \underline{n}$. \square

Question 16. Montrer que $\underline{\infty}$ est l'unique ultrafiltre non-principal de A .

Solution. The collection \mathcal{C} is closed under finite intersections because finite sets are closed under finite unions. If $u \in A$ is not an element of \mathcal{C} , then u must be finite, and then its complement is in \mathcal{C} by definition.

There does not exist $a \in A$ such that $\uparrow a = \underline{\infty}$: such a would clearly have to be non-empty, but if $n \in a$ then $a \not\subseteq \mathbb{N} \setminus \{n\}$, while $\mathbb{N} \setminus \{n\} \in \underline{\infty}$.

Let $x \in X$ be a non-principal ultrafilter. We show that $x = \underline{\infty}$. We always have $\mathbb{N} \in x$. Let $u \in A$ be finite and non-empty and write $u = \bigcup_{i=1}^n \{m_i\}$ for some $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Then $\{m_i\} \notin x$ since x is non-principal, thus $\mathbb{N} \setminus \{m_i\} \in x$. Now $\bigcap_{i=1}^n (\mathbb{N} \setminus \{m_i\}) = \mathbb{N} \setminus u$ is also in x . It also follows that $u \notin x$ since x is proper. \square

Soit X_A l'ensemble des ultrafiltres de A . D'après les deux questions précédentes, on a

$$X_A = \{\underline{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\underline{\infty}\}.$$

Rappelons que la relation $R_A \subseteq X_A \times X_A$ du cadre d'ultrafiltres de A est définie par, pour tous $w, v \in X_A$,

$$wR_A v \text{ si, et seulement si, pour tout } a \in A, \text{ si } \Box a \in w, \text{ alors } a \in v.$$

Question 17. Montrer que $wR_A v$ si, et seulement si, pour tout $b \in A$, si $b \in v$ alors $\Diamond b \in w$.

Solution. If wRv and $b \in v$, then $\neg b \notin v$, so $\Box \neg b \notin w$. We conclude $\Diamond b = \neg \Box \neg b \in w$. Conversely, if not wRv , pick $a \in A$ such that $\Box a \in w$ and $a \notin v$. Then $b := \neg a \in v$, but we cannot have $\Diamond b \in w$ since $\Diamond b \wedge \Box a = \perp$. \square

Question 18. Montrer que, pour tous $n, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on a $\underline{n}R\underline{m}$ si, et seulement si, $m = \infty$ ou $(n, m \in \mathbb{N} \text{ et } n < m)$.

Solution. We use the characterization in the previous question.

First suppose $m = \infty$ and let $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ be arbitrary ; we need to show that $\underline{n}R\underline{m}$. Let $a \in \underline{m}$. Then a is cofinite, so $\Diamond a = \mathbb{N}$ and we indeed have $\mathbb{N} \in \underline{n}$.

Now suppose $m \in \mathbb{N}$. We need to show $\underline{n}R\underline{m}$ if and only if $n \in \mathbb{N}$ and $n < m$. The condition is sufficient : if $a \in A$ and $a \in \underline{m}$, this means that $m \in a$. Therefore, $n \in \Diamond a$, as $n < m$, and this means $\Diamond a \in \underline{n}$. For the necessity, suppose $\underline{n}R\underline{m}$. Since $\{m\} \in \underline{m}$, we have $\Diamond\{m\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x < m\} \in \underline{n}$, meaning that $n \in \mathbb{N}$ and $n < m$. \square

Question 19. Montrer qu'il existe une valuation $V : \{p\} \rightarrow \mathcal{P}(X_A)$ telle que $(X_A, R_A, V), \underline{0} \models \neg M$.

Note ajoutée après l'examen. Cette dernière question était malheureusement fautive ; il n'existe en réalité pas de telle valuation pour cette algèbre A , voir une preuve ci-dessous. La construction correcte d'une algèbre modale A' qui valide M et telle que M échoue sur le cadre d'ultrafiltres de A' est plus complexe ; voir par exemple [Goldblatt 1991](#).

Démonstration de la négation de la Question 19. Soit $V : \{p\} \rightarrow \mathcal{P}(X_A)$ une valuation telle que $(X_A, R_A, V), \underline{0} \models \Box \Diamond p$. Alors, puisque $\underline{0}R_A \underline{\infty}$, on a $\underline{\infty} \models \Diamond p$. Puisque le seul R_A -successeur de $\underline{\infty}$ est $\underline{\infty}$, on obtient $\underline{\infty} \in V(p)$. Mais alors aussi $(X_A, R_A, V), \underline{\infty} \models \Box p$, et donc $(X_A, R_A, V), \underline{0} \models \Diamond \Box p$. Donc, pour toute valuation V , on a $(X_A, R_A, V), \underline{0} \models M$. \square