

# Basiswiskunde

## Samenvatting

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica  
Universiteit van Amsterdam



17 oktober 2018

## Over deze samenvatting

- ▶ Deze slides zijn bedoeld als hulpmiddel om een *overzicht* van het vak te krijgen.
- ▶ De meeste vragen zijn dan ook *breder* dan typische tentamenvragen.
- ▶ Hoe gebruik je deze slides?

# Over deze samenvatting

- ▶ Deze slides zijn bedoeld als hulpmiddel om een *overzicht* van het vak te krijgen.
- ▶ De meeste vragen zijn dan ook *breder* dan typische tentamenvragen.
- ▶ Hoe gebruik je deze slides?
  - ▶ Probeer de vragen *uit je hoofd* te beantwoorden.

# Over deze samenvatting

- ▶ Deze slides zijn bedoeld als hulpmiddel om een *overzicht* van het vak te krijgen.
- ▶ De meeste vragen zijn dan ook *breder* dan typische tentamenvragen.
- ▶ Hoe gebruik je deze slides?
  - ▶ Probeer de vragen *uit je hoofd* te beantwoorden.
  - ▶ Laat *V* de verzameling vragen die je niet kon beantwoorden.

# Over deze samenvatting

- ▶ Deze slides zijn bedoeld als hulpmiddel om een *overzicht* van het vak te krijgen.
- ▶ De meeste vragen zijn dan ook *breder* dan typische tentamenvragen.
- ▶ Hoe gebruik je deze slides?
  - ▶ Probeer de vragen *uit je hoofd* te beantwoorden.
  - ▶ Laat *V* de verzameling vragen die je niet kon beantwoorden.
  - ▶ Voor elke vraag in *V*: zoek het antwoord op de vraag, en maak bijbehorende werkcollege/oefenopgaven.

# Over deze samenvatting

- ▶ Deze slides zijn bedoeld als hulpmiddel om een *overzicht* van het vak te krijgen.
- ▶ De meeste vragen zijn dan ook *breder* dan typische tentamenvragen.
- ▶ Hoe gebruik je deze slides?
  - ▶ Probeer de vragen *uit je hoofd* te beantwoorden.
  - ▶ Laat  $V$  de verzameling vragen die je niet kon beantwoorden.
  - ▶ Voor elke vraag in  $V$ : zoek het antwoord op de vraag, en maak bijbehorende werkcollege/oefenopgaven.
  - ▶ *Ga terug naar* de eerste stap totdat  $V = \emptyset$ .

# Over deze samenvatting

- ▶ Deze slides zijn bedoeld als hulpmiddel om een *overzicht* van het vak te krijgen.
- ▶ De meeste vragen zijn dan ook *breder* dan typische tentamenvragen.
- ▶ Hoe gebruik je deze slides?
  - ▶ Probeer de vragen *uit je hoofd* te beantwoorden.
  - ▶ Laat  $V$  de verzameling vragen die je niet kon beantwoorden.
  - ▶ Voor elke vraag in  $V$ : zoek het antwoord op de vraag, en maak bijbehorende werkcollege/oefenopgaven.
  - ▶ *Ga terug naar* de eerste stap totdat  $V = \emptyset$ .
  - ▶ (Dit algoritme stopt na eindig veel stappen, omdat de verzameling  $V$  in elke iteratie kleiner wordt.)

# 1. Logica en Bewijzen

- ▶ Wat betekenen de symbolen  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ?
- ▶ Wat is een *tautologie*?
- ▶ Hoe bepaal je of een logische formule een tautologie is?
- ▶ Hoe geef je een *bewijs met tegenspraak*?
- ▶ Wat is hiervan een voorbeeld?
- ▶ Wat is de *contrapositie* van  $P \rightarrow Q$ ?
- ▶ Hoe geef je een *bewijs met contrapositie*?
- ▶ Wat is hiervan een voorbeeld?



## 2. Verzamelingen en Kwantoren

Notatie, kwantoren, negaties van kwantoren

- ▶ Wat zijn de verzamelingen  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ?
- ▶ Wat betekent de notatie  $S = \{x \in \dots : \text{een bewering met } x\}$ ?
- ▶ Wat is een voorbeeld van deze notatie?
- ▶ Wat betekenen de *kwantoren*  $\exists$  en  $\forall$ ?
- ▶ Hoe zien de *negaties* van uitspraken met kwantoren eruit?
- ▶ Wat is een (ingewikkeld) voorbeeld van een negatie van een uitspraak met kwantoren?

## 2. Verzamelingen en Kwantoren

Deelverzamelingen, operaties, machtsverzameling, Cartesisch product

- ▶ Wanneer is  $B$  een *deelverzameling* van  $A$ ?
- ▶ Wat is een voorbeeld van een *bewijs* dat  $B \subseteq A$ ?
- ▶ Wat betekenen de notaties  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ?
- ▶ Wat betekenen de notaties  $\bigcup_{i \in I} A_i$  en  $\bigcap_{i \in I} A_i$ ?
- ▶ Wat zijn de verzamelingen  $A \times B$ ,  $\mathcal{P}(A)$  en  $A^B$ ?
- ▶ Hoe bewijs je dat twee verzamelingen *gelijk* zijn?
- ▶ Wat is een voorbeeld van een *bewijs van gelijkheid* tussen verzamelingen?

### 3. Inductie

- ▶ Hoe ziet een *bewijs met inductie* er uit?
- ▶ Wat is een voorbeeld van een bewijs met inductie?
- ▶ Hoe verschilt een *bewijs met sterke inductie* van een bewijs met (gewone) inductie?
- ▶ Wat is een voorbeeld van een bewijs met sterke inductie?

## 4. Relaties en Functies

- ▶ Wat is een *relatie* tussen twee verzamelingen?
- ▶ Wanneer is een relatie een *functie*?
- ▶ Wat zijn voorbeelden van relaties die geen functie zijn?
- ▶ Wat zijn *domein*, *codomein* en *bereik* van een functie?

## 4. Relaties en Functies

### Equivalentierelaties

- ▶ Welke drie eigenschappen heeft een *equivalentierelatie*, en wat betekenen ze?
- ▶ Wat zijn voorbeelden van equivalentierelaties?
- ▶ Wat is een *equivalentieklasse*?
- ▶ Wat is een *volledig stelsel representanten*?
- ▶ Wat zijn voorbeelden van deze begrippen?

## 4. Relaties en Functies

### Equivalentierelaties en Partities

- ▶ Wat is een *partitie*?
- ▶ Wat zijn voorbeelden van partities?
- ▶ Wat is de partitie *geïnduceerd door* een equivalentierelatie, en omgekeerd?
- ▶ Hoe bewijs je dat iedere partitie geïnduceerd wordt door een equivalentierelatie, en omgekeerd?
- ▶ Wat zijn voorbeelden van deze correspondentie tussen equivalentierelaties en partities?

## 4. Relaties en Functies

Injectief, surjectief, bijectief, inverse

- ▶ Wat betekent het dat een functie *injectief*, *surjectief* of *bijjectief* is?
- ▶ Wat zijn voorbeelden van injectieve maar niet surjectieve functies, en omgekeerd?
- ▶ Wat is de *samenstelling* van twee functies?
- ▶ Wat is de *identiteit* op een verzameling?
- ▶ Hoe beïnvloedt samenstelling injectiviteit en surjectiviteit?
- ▶ Wat zijn hier voorbeelden en tegenvoorbeelden van?
- ▶ Wat is de *inverse functie*?
- ▶ Wat zijn hier voorbeelden van?
- ▶ Hoe bewijs je dat een functie bijectief is *desda* de functie een inverse heeft?

## 4. Relaties en Functies

### Beeld en inverse beeld

- ▶ Wat is het (directe) *beeld* van een deelverzameling van het domein onder een functie?
- ▶ Wat zijn voorbeelden hiervan?
- ▶ Wat is het *inverse beeld* van een deelverzameling van het co-domein onder een functie?
- ▶ Wat zijn voorbeelden hiervan?
- ▶ Wat hebben het directe beeld en *surjectiviteit* met elkaar te maken?
- ▶ Hoe bewijs je de *gelijkheden* en *inclusies* over het inverse en directe beeld van doorsnedes, verenigingen en complementen?
- ▶ Wat zijn tegenvoorbeelden voor niet-geldige zulke inclusies?



## 4. Relaties en Functies

### Oneindigheid

- ▶ Wat betekent het dat twee verzamelingen *gelijkmachtig* zijn?
- ▶ Wat zegt het *duiventil-principe*?
- ▶ Wanneer heet een verzameling *aftelbaar*? (Let op: kan ook eindig zijn!)
- ▶ Hoe kun je in het algemeen *bewijzen* dat een verzameling aftelbaar is?
- ▶ Wanneer heet een verzameling *overaftelbaar*?
- ▶ Hoe bewijs je dat een verzameling *overaftelbaar* is?
- ▶ Wat zijn voorbeelden van (over)aftelbare verzamelingen?
- ▶ Hoe *bewijs* je dat die voorbeelden (over)aftelbaar zijn?

# 5. Getallen

## Rationale en reële getallen

- ▶ Hoe kun je de rationale getallen definiëren als equivalentieklassen van paren gehele getallen?
- ▶ Hoe kun je hiermee laten zien dat optelling en vermenigvuldiging welgedefinieerd zijn?
- ▶ Wat zeggen de twee cruciale eigenschappen *volledigheid* en *dichtheid* van de reële getallen?

## 5. Getallen

### Complexe getallen

- ▶ Wat is een *complex getal*?
- ▶ Wat zijn het *reële deel*, *imaginaire deel*, *modulus*, *argument* en *geconjugeerde* van een complex getal?
- ▶ Hoe bereken je deze waarden voor verschillende voorbeelden van complexe getallen?
- ▶ Hoe bereken je de som en het product van twee complexe getallen?
- ▶ Hoe deel je twee complexe getallen door elkaar?
- ▶ Wat zijn hier voorbeelden van?

## 5. Getallen

### Complexe getallen en polynomen

- ▶ Hoe kun je met complexe getallen *kwadratische vergelijkingen* oplossen?
- ▶ Wat zegt de *hoofdstelling van de algebra*?
- ▶ Hoe kun je een polynoom *factoriseren* als je (sommige van) de nulpunten van het polynoom kent?
- ▶ Wat zijn voorbeelden van polynomen van hogere graad dan 2 die je zo kunt factoriseren?

## 5. Getallen

### De complexe e-macht

- ▶ Hoe kun je een complex getal visualiseren als punt in het *complexe vlak*?
- ▶ Wat zijn *poolcoördinaten*?
- ▶ Wat zijn voorbeelden van poolcoördinaten voor verschillende complexe getallen?
- ▶ Wat zijn de modulus en het argument van  $re^{i\phi}$ ?
- ▶ Hoe veranderen modulus en argument als je twee complexe getallen *vermenigvuldigt*?
- ▶ Wat zijn voorbeelden hiervan?

## 5. Getallen

### De formule van Euler en eenheidswortels

- ▶ Hoe verbindt de *formule van Euler* de complexe  $e$ -macht met sinus en cosinus?
- ▶ Hoe kun je met de notatie  $re^{i\phi}$  cirkels en halflijnen in het complexe vlak omschrijven?
- ▶ Wat zijn de  $n$ -de machts *eenheidswortels*?
- ▶ Hoe zien deze er uit in het *complexe vlak*?
- ▶ Hoe kun je  $n$ -de machts eenheidswortels gebruiken om vergelijkingen zoals  $z^n = a$  op te lossen voor  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ?
- ▶ Wat hebben eenheidswortels te maken met *modulo rekenen*?

## 6. Gehele Getallen

### Deling met rest, algoritme van Euclides

- ▶ Wat is *deling met rest*?
- ▶ Hoe *bewijs* je dat deling met rest altijd mogelijk is?
- ▶ Waar staat de afkorting *ggd* voor en wat is de definitie?
- ▶ Wat is een *lineaire combinatie*?
- ▶ Wat betekent *onderling ondeelbaar* of *copriem*?
- ▶ Hoe werkt het *algoritme van Euclides*?
- ▶ Hoe bewijs je dat je met het algoritme altijd de *ggd* als lineaire combinatie kunt schrijven?
- ▶ Gebruik het algoritme in een aantal concrete voorbeelden.

## 6. Gehele Getallen

### Lemma van Euclides, Hoofdstelling van de Rekenkunde

- ▶ Wat zegt het *Lemma van Euclides*?
- ▶ Hoe *bewijs* je het Lemma van Euclides met behulp van het algoritme?
- ▶ Wat zegt het Lemma van Euclides over priemgetallen?
- ▶ Welke andere beweringen over deelbaarheid kun je op soortgelijke manier als het Lemma van Euclides bewijzen?
- ▶ Wat zegt de *hoofdstelling van de rekenkunde*?
- ▶ Wat zijn concrete getallenvoorbeelden van deze stelling?
- ▶ Hoe bewijs je dat ieder getal een *priemdeler* heeft?
- ▶ Hoe bewijs je de hoofdstelling van de rekenkunde?
- ▶ Hoe bewijs je dat  $\sqrt[n]{a}$  irrationaal is als  $\sqrt[n]{a}$  niet geheel is?



## 6. Gehele Getallen

### Modulo-rekenen

- ▶ Hoe is de relatie *congruentie modulo  $n$*  gedefinieerd?
- ▶ Hoe bewijs je dat het een *equivalentierelatie* is?
- ▶ Wat betekenen de notaties  $\mathbb{Z}_n$  en  $\mathbb{Z}_n^*$ ?
- ▶ Hoe bewijs je dat *optelling* en *vermenigvuldiging* welgedefinieerd zijn op  $\mathbb{Z}_n$ ?
- ▶ Hoe kun je die welgedefinieerdheid in concrete getallenvoorbeelden gebruiken?
- ▶ Hoe kun je met behulp van de welgedefinieerdheid *deelbaarheidscriteria* bewijzen?
  - ▶ Bijvoorbeeld:  $n$  is deelbaar door 3 desda de som van de cijfers van  $n$  in decimale notatie is deelbaar door 3?
  - ▶ Andere voorbeelden?

## 6. Gehele Getallen

### Inverteerbare restklassen

- ▶ Wat betekent het dat een restklasse *inverteerbaar* is?
- ▶ Hoe kun je met behulp van de *ggd* bepalen of een restklasse inverteerbaar is?
- ▶ Hoe *bewijs* je dit criterium?
- ▶ Wat zijn concrete getallenvoorbeelden van inverteerbare restklassen en hun inverses?
- ▶ Hoe veel inverteerbare restklassen zijn er modulo een priemgetal?

## 6. Gehele Getallen

Euler  $\phi$  functie, Stelling van Euler, Kleine Stelling van Fermat

- ▶ Wat is de *Euler  $\phi$  functie*?
- ▶ Hoe bewijs je dat *vermenigvuldigen met een inverteerbare restklasse* een bijectie is?
- ▶ Wat zijn hier concrete getallenvoorbeelden van?
- ▶ Wat zegt de *Stelling van Euler* over de  $\phi(n)$ 'de macht van een inverteerbare restklasse modulo  $n$ ?
- ▶ Hoe bewijs je dat, in het algemeen en in een concreet geval?
- ▶ Wat zegt de *Kleine Stelling van Fermat*?
- ▶ Hoe bewijs je die?
- ▶ Hoe worden deze feiten gebruikt in RSA-encryptie?