EXTRA OEFENOPGAVEN BASISWISKUNDE 2018

Opgave 1. Zij A, B en C verzamelingen. Bewijs dat $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Opgave 2. Zij $f : X \to Y$ een afbeelding en $A \subseteq Y$.

(a) Geldt $f\big(f^{-1}(A)\big) \subseteq A$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
(b) Geldt $A \subseteq f\big(f^{-1}(A)\big)$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
(c) Stel dat f surjectief is. Laat zien dat $f\big(f^{-1}(A)\big) = A$.

Opgave 3. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, waarbij $\lfloor x \rfloor$ het grootste gehele getal kleiner of gelijk aan x is.

(a) Bepaal het bereik van f.
(b) Bepaal $f^{-1}\big([0, 1/2]\big)$.
(c) Bepaal $f(\mathbb{Z})$ en $f(\mathbb{Q})$.

Opgave 4. Zij A en B verzamelingen.

(a) Bewijs of geef een tegenvoorbeeld: $\mathscr{P}(A \cup B) \subseteq \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.
(b) Bewijs of geef een tegenvoorbeeld: $\mathscr{P}(A \cup B) \supseteq \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.

Opgave 5. Toon aan dat $2^n > n^3$ voor $n \geq 10$.

Opgave 6. Bekijk $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeven door $f(n, m) = 2^n 3^m$.

(a) Laat zien dat f een injectieve afbeelding is.
(b) Gebruik (a) om te bewijzen dat $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aftelbaar is.

Opgave 7.

(a) Zij $a < b$ reële getallen. Laat zien dat (a, b) gelijkmachtig is met $(0, 1)$.
(b) Laat zien dat $(0, \infty)$ gelijkmachtig is met $\mathbb{R}$.

Opgave 8. Bewijs dat voor ieder priemgetal $p > 3$ geldt dat $p^2 - 1$ deelbaar is door 24.

Opgave 9. Zij $f : X \to Y$ een afbeelding en $A, B \subseteq X$.

(a) Toon aan dat $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
(b) Laat met een tegenvoorbeeld zien dat gelijkheid in het algemeen niet geldt.
(c) Geldt gelijkheid wel als f injectief is? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 10. Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{Z}^+$ geldt

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1 + n.$$

Opgave 11.

(a) Geef de definitie van aftelbaarheid.
(b) Zij $A = \{1, 2\}$. Toon aan dat $A^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to A : f \text{ een functie}\}$ niet aftelbaar is.

Opgave 12. Zij A en B aftelbaar oneindige verzamelingen. Bewijs dat $A \cup B$ aftelbaar is.

Opgave 13. Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

Opgave 14. Zij $U \subseteq \mathbb{R}$ een deelverzameling van $\mathbb{R}$. Definieer op U de relatie $\sim$ door $x \sim y$ dan en slechts dan als $[x, y] \subseteq U$ (of $[y, x]$ als $y < x$).

(a) Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
(b) Neem $U = [0,1] \cup [2,4]$. Bepaal de equivalentieklassen.

Opgave 15.

(a) Wanneer heet een afbeelding $f\colon X \to Y$ surjectief?
(b) Stel dat $f\colon X \to Y$ en $g\colon Y \to Z$ surjectief zijn. Laat zien dat $(g \circ f)\colon X \to Z$ ook surjectief is.
(c) Als $g \circ f$ surjectief is, moet f dan surjectief zijn? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
(d) Als $g \circ f$ surjectief is, moet g dan surjectief zijn? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 16.

(a) Zij A en B aftelbare verzamelingen. Bewijs dat $A \times B$ aftelbaar is.
(b) Bewijs dat, voor ieder positief geheel getal n, de verzameling $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ aftelbaar is.

Opgave 17. Laat zien dat $\sqrt{17}+1$ geen rationaal getal is.

Opgave 18. Zij A, B, C, D verzamelingen.

(a) Bewijs dat
$$(A \setminus B) \times (C \setminus D) \subseteq (A \times C) \setminus (B \times D).$$
(b) Laat met een tegenvoorbeeld zien dat gelijkheid in het algemeen niet geldt.

Opgave 19. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{Z}^+$ geldt
$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Opgave 20. Zij $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(x) = x/|x|$.

(a) Bepaal het bereik van f.
(b) Definieer $x \sim y$ desda $f(x) = f(y)$. Wat zijn de equivalentieklassen van $\sim$?
(c) Geef een volledig stelsel representanten voor $\sim$.

Opgave 21. Bepaal de volgende verzamelingen:
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[1+\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right], \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[1+\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right], \qquad \bigcup_{x \in \mathbb{Z}} (x, x+1).$$

Opgave 22. Bekijk de afbeelding $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven door $f(z) = z^3$.

(a) Toon aan dat f surjectief is.
(b) Is f injectief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
(c) Bepaal $f^{-1}(A)$, waar $A = \{a \in \mathbb{R} : a \in [-1,1]\}$.

Opgave 23. Definieer $\sim$ op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ door $z \sim w$ desda $\arg z = \arg w$, waarbij we het argument in $[0, 2\pi)$ kiezen.

(a) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
(b) Geef de equivalentieklasse van $1+i$.
(c) Geef een volledig stelsel representanten voor de equivalentierelatie $\sim$.

Opgave 24. Zijn a, b natuurlijke getallen ≥ 2. Schrijf $p_1 < \cdots < p_m$ voor de priemdelers van a, $q_1 < \cdots < q_n$ voor de priemdelers van b, en $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_n$ voor de unieke positieve gehele getallen zo dat $a = p_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot p_m^{a_m}$ en $b = q_1^{b_1} \cdot \cdots \cdot q_n^{b_n}$. Bewijs dat
$$\operatorname{ggd}(a,b) = r_1^{c_1} \cdot \cdots \cdot r_\ell^{c_\ell},$$

waar $r_1 < \cdots < r_\ell$ de priemgetallen zijn die in zowel de rij $p_1, \ldots, p_m$ als de rij $q_1, \ldots q_n$ voorkomen, en voor $1 \leq k \leq \ell$, $c_k := \min(a_i, b_j)$, waar i, j zo zijn dat $p_i = r_k = q_j$.

Opgave 25. Het *kleinste gemene veelvoud* van $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ is gedefinieerd als het kleinste positieve gehele getal n zo dat $a \mid n$ en $b \mid n$; notatie: $\mathrm{kgv}(a, b)$. Bewijs dat $\mathrm{kgv}(a, b) = \dfrac{|ab|}{\mathrm{ggd}(a, b)}$.

Opgave 26. Bepaal het unieke getal $0 \leq r < 23$ zo dat $12^{45} \equiv r \mod 23$.

Opgave 27. (a) Bepaal $\phi(14)$ en geef de inverteerbare restklassen in $\mathbb{Z}_{14}$.

(b) Beschrijf alle gehele getallen a zodat $3a \equiv 1 \mod 14$.

(c) Leg uit waarom $13^7 \equiv 13 \mod 14$.

Opgave 28. (a) Vind gehele getallen k en ℓ zo dat $1 = 19k + 22\ell$.

(b) Vind $0 \leq m < 23$ zo dat $m^{19} \equiv 2 \mod 23$. Bewijs dat de gevonden m inderdaad werkt.