BASISWISKUNDE 2018
Oefententamen - Uitwerking

We geven één mogelijke uitwerking. Andere oplossingen zijn vaak ook mogelijk.

Opgave 1. *Zijn A, B en C verzamelingen. Bewijs dat*

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C). \qquad \textit{[10 pt]}$$

We bewijzen "$\subseteq$" en "$\supseteq$".

Zij eerst $(x, y) \in A \times B \cap C$. Dan geldt $x \in A$ en $y \in B \cap C$. Dus $y \in B$ en $y \in C$. Omdat nu $x \in A$ en $y \in B$, geldt $(x, y) \in A \times B$, en omdat $x \in A$ en $y \in C$, geldt ook $(x, y) \in A \times C$. Dus $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

Zij nu $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Dan geldt $(x, y) \in A \times B$, dus zeker $x \in A$, en $y \in B$. Omdat ook $(x, y) \in A \times C$, geldt verder $y \in C$. Dus $y \in B \cap C$. Omdat we al zagen dat $x \in A$, geldt dus $(x, y) \in A \times (B \cap C)$.

Opgave 2. *(a) Geef de definitie van* aftelbaar oneindige *verzameling. [3 pt]*

(b) Bewijs dat de functie $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gedefinieeerd door $f(n, m) := 2^n 3^m$ injectief is. Als je in je bewijs een in het college bewezen Stelling of Lemma gebruikt, geef daar dan de naam van. [4 pt]

(c) Leg uit waarom uit het in (b) bewezen feit volgt dat $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aftelbaar oneindig is. [3 pt]

(a) Een verzameling X heet aftelbaar oneindig als er een bijectie bestaat van X naar $\mathbb{N}$.

(b) Zijn (n_1, m_1) en (n_2, m_2) elementen van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zo dat $f(n_1, m_1) = f(n_2, m_2)$. Dit betekent dat $2^{n_1} 3^{m_1} = 2^{n_2} 3^{m_2}$. Dit zijn twee priemontbindingen van hetzelfde getal, dus vanwege de Hoofdstelling van de Rekenkunde geldt dat $n_1 = n_2$ en $m_1 = m_2$. Dus $(n_1, m_1) = (n_2, m_2)$.

(c) Als er een injectieve functie van X naar $\mathbb{N}$ bestaat, dan is X aftelbaar (en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is zeker oneindig).

Opgave 3. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$ geldt*

$$\sum_{k=1}^{n} k 2^k = (n-1) 2^{n+1} + 2. \qquad \textit{[10 pt]}$$

We bewijzen de gelijkheid met inductie naar n. Voor $n = 1$ zijn de linker- en rechterzijde allebei gelijk aan 2. Stel dat de gelijkheid geldt voor zekere $n \geq 1$, we bewijzen dat hij ook geldt voor $n + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k 2^k &= \sum_{k=1}^{n} k 2^k + (n+1) 2^{n+1} \\
&= (n-1) 2^{n+1} + 2 + (n+1) 2^{n+1} \\
&= 2n \cdot 2^{n+1} + 2 \\
&= 2 \cdot 2^{n+2} + 2,
\end{aligned}$$

hetgeen we moesten bewijzen. De inductie-hypothese is gebruikt in de gelijkheid van de eerste naar de tweede regel.

Opgave 4. *Bekijk de functie $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to [0, 2\pi)$ gegeven door $f(z) = \mathrm{Arg}(z)$. Definieer de equivalentierelatie $\sim$ op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ door $z \sim w$ dan, en slechts dan, als $f(z) = f(w)$.*

(a) Teken de equivalentieklasse van $z = 1 - i$ in het complexe vlak. Motiveer je antwoord. [4 pt]

(b) Leg precies uit wat de volgende uitspraak betekent: [3 pt]

$\{e^{i\phi} : \phi \in \mathbb{R}, 4\pi \le \phi < 6\pi\}$ *is een volledig stelsel representanten voor* $\sim$.

(c) Is de uitspraak hierboven waar? Leg uit. [3 pt]

(a) Dit is een halflijn beginnend in de oorsprong door het punt $1-i$ (de oorsprong zelf doet niet mee). De reden is dat, voor alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, geldt $z \sim 1-i$ desda $\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{7\pi}{4}$, want $\mathrm{Arg}(1-i) = \dfrac{7\pi}{4}$. De punten met die eigenschap zijn precies de punten op de getekende halflijn.

(b) Deze uitspraak betekent dat de genoemde verzameling precies één element uit elke equivalentieklasse van $\sim$ bevat, dus dat er voor iedere $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ een unieke $\phi \in [4\pi, 6\pi)$ bestaat zo dat $z \sim e^{i\phi}$, of te wel $\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(e^{i\phi})$.

(c) Ja, deze uitspraak is waar. Er geldt namelijk, voor $\phi \in [4\pi, 6\pi)$, dat $\mathrm{Arg}(e^{i\phi}) = \phi - 4\pi$. Dus, als $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dan heeft $\phi := \mathrm{Arg}(z) + 4\pi$ de eigenschap dat $e^{i\phi} \sim z$.

Opgave 5. *Zijn X, Y verzamelingen en $f\colon X \to Y$ een functie.*

(a) Bewijs dat, als er een functie $g\colon Y \to X$ bestaat zo dat $f \circ g = i_Y$ en $g \circ f = i_X$, dan is f bijectief. [5 pt]

(b) Stel dat $h\colon Y \to Z$ een functie is zo dat $h \circ f$ bijectief is. Is f dan ook bijectief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld. [5 pt]

(a) Stel dat een dergelijke functie g bestaat. Dan is f injectief: zijn $x, x' \in X$ zo dat $f(x) = f(x')$. Dan geldt

$$x = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x') = x'.$$

Ook is f surjectief: zij $y \in Y$, en bekijk $x := g(y)$. Dan geldt $f(g(y)) = f \circ g(y) = y$.

(b) Nee, f hoeft niet bijectief te zijn, want f hoeft niet surjectief te zijn (f moet wel injectief zijn). Bekijk bijvoorbeeld $X = \{1\}$, $Y = \{2, 3\}$ en $Z = \{4\}$, met $f(1) := 2$, $h(2) := 4$ en $h(3) := 4$. Dan is $h \circ f$ bijectief, maar f is niet surjectief.

Opgave 6. *(a) Zijn a en b gehele getallen, niet allebei gelijk aan nul. Schrijf de afkorting $\mathrm{ggd}(a, b)$ voluit, en geef de definitie. [4 pt]*

(b) Bereken $\mathrm{ggd}(374, 165)$. [3 pt]

(c) Schrijf $\mathrm{ggd}(374, 165)$ als lineaire combinatie van 374 en 165. [3 pt]

(a) $\mathrm{ggd}(a, b)$ staat voor grootste gemene deler. Het is het grootste getal d zo dat a en b allebei deelbaar zijn door d.

(b) Met het algoritme van Euclides:

$$\begin{aligned} 374 &= 2 \times 165 + 44 \\ 165 &= 3 \times 44 + 33 \\ 44 &= 1 \times 33 + 11 \\ 33 &= 3 \times 11, \end{aligned}$$

dus $\mathrm{ggd}(374, 165) = 11$.

(c) Uit (b) leiden we af:

$$11 = 44-33 = 44-(165-3\times 44) = 4\times 44-165 = 4\times(374-2\times 165)-165 = 4\times 374-9\times 165.$$