

BASISWISKUNDE 2018

Oefententamen

Beschikbare tijd: 3 uur

Instructies: Leg altijd je antwoorden uit. Het enige toegestane hulpmiddel is kladpapier.

Opgave 1. Zijn A , B en C verzamelingen. Bewijs dat

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C). \quad [10 \text{ pt}]$$

Opgave 2. (a) Geef de definitie van *aftelbaar oneindige* verzameling. [3 pt]

(b) Bewijs dat de functie $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gedefinieerd door $f(n, m) := 2^n 3^m$ injectief is. Als je in je bewijs een in het college bewezen Stelling of Lemma gebruikt, geef daar dan de naam van. [4 pt]

(c) Leg uit waarom uit het in (b) bewezen feit volgt dat $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aftelbaar oneindig is. [3 pt]

Opgave 3. Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$ geldt

$$\sum_{k=1}^n k 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2. \quad [10 \text{ pt}]$$

Opgave 4. Bekijk de functie $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow [0, 2\pi)$ gegeven door $f(z) = \text{Arg}(z)$. Definieer de equivalentierelatie \sim op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ door $z \sim w$ dan, en slechts dan, als $f(z) = f(w)$.

(a) Teken de equivalentieklasse van $z = 1 - i$ in het complexe vlak. Motiveer je antwoord. [4 pt]

(b) Leg precies uit wat de volgende uitspraak betekent: [3 pt]

$\{e^{i\phi} : \phi \in \mathbb{R}, 4\pi \leq \phi < 6\pi\}$ is een volledig stelsel representanten voor \sim .

(c) Is de uitspraak hierboven waar? Leg uit. [3 pt]

Opgave 5. Zijn X, Y verzamelingen en $f: X \rightarrow Y$ een functie.

(a) Bewijs dat, als er een functie $g: Y \rightarrow X$ bestaat zo dat $f \circ g = i_Y$ en $g \circ f = i_X$, dan is f bijectief. [5 pt]

(b) Stel dat $h: Y \rightarrow Z$ een functie is zo dat $h \circ f$ bijectief is. Is f dan ook bijectief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld. [5 pt]

Opgave 6. (a) Zijn a en b gehele getallen, niet allebei gelijk aan nul. Schrijf de afkorting $\text{ggd}(a, b)$ voluit, en geef de definitie. [4 pt]

(b) Bereken $\text{ggd}(374, 165)$. [3 pt]

(c) Schrijf $\text{ggd}(374, 165)$ als lineaire combinatie van 374 en 165. [3 pt]