BASISWISKUNDE 2018, ALLE OPGAVEN

Werkcollege 1

Opgave 1. (a) Laat zien dat $\neg(P \wedge Q)$ logisch equivalent is aan $\neg P \vee \neg Q$.
(b) Laat zien dat $P \wedge (Q \vee R)$ logisch equivalent is aan $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
(c) Geef voorbeelden in woorden van de equivalenties in (a) en (b).

Opgave 2. Schrijf P voor de uitspraak "3 is een priemgetal" en Q voor de uitspraak "$2+2=5$". Leg van elk van de volgende uitspraken uit of ze waar of onwaar zijn.
(a) $P \wedge Q$
(b) $P \vee Q$
(c) $P \vee \neg Q$
(d) $P \to Q$
(e) $Q \to P$
(f) $Q \to Q$

Opgave 3. (a) Geef de waarheidstabel van $\neg(P \to Q)$.
(b) Wat is de *enige* manier waarop $P \to Q$ *onwaar* kan zijn?
(c) Maak een formule die equivalent is aan $\neg(P \to Q)$, met alleen de connectieven $\wedge$ en $\neg$.

Opgave 4. Zijn x en y gehele getallen.
(a) Stel dat x en y oneven zijn. Bewijs dat $x \cdot y$ oneven is.
(b) Stel dat $x \cdot y$ even is. Bewijs dat x of y even moet zijn.
(c) Bekijk de bewering "als $x \cdot y$ oneven is, dan zijn x en y oneven". Geef de contrapositief en bewijs deze.

Opgave 5.
(a) Zij n een geheel getal. Bewijs: als n^2 deelbaar is door 3, dan is n ook deelbaar door 3.
(b) Bewijs dat $\sqrt{3}$ geen rationaal getal is.
(c) Bewijs dat $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ geen rationaal getal is.
Hint. Schrijf a voor het getal $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, en bekijk $(a-\sqrt{3})^2$. Als a rationaal zou zijn, wat zou je dan kunnen afleiden over $\sqrt{3}$?

Werkcollege 2

Opgave 1. In deze opgave is het universum van kwantificatie $\mathbb{R}$.
(a) Schrijf in woorden: $\forall x, \exists y, \exists z, \big((y \in \mathbb{Z}) \wedge (z \in \mathbb{Z}) \wedge (y \le x) \wedge (x \le z)\big)$. Is deze uitspraak waar?
(b) Schrijf in symbolen: er bestaat een reëel getal dat groter is dan elk ander reëel getal. Is deze uitspraak waar?
(c) Schrijf in symbolen: elk reëel getal is willekeurig goed te benaderen met rationale getallen.
(d) Geef in woorden en in symbolen de negaties van de uitspraken in (a) – (c), op zo'n manier dat alle negaties ná de kwantoren komen.

Opgave 2. Beschrijf de volgende verzamelingen in woorden en/of met een schets.
(a) $\{x \in \mathbb{Z} : \exists y, (y \in \mathbb{Z} \wedge x = 2y)\}$
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$

Schrijf in verzamelingnotatie.
(c) De verzameling van alle gehele getallen die te schrijven zijn als de som van twee kwadraten van gehele getallen.
(d) De verzameling van alle punten in het vlak op de rand van het vierkant met hoekpunten $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ en $(-1,-1)$.

Opgave 3. Zijn A, B, C verzamelingen. Bewijs dat $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Opgave 4. Zijn A, B, X verzamelingen met $A \subseteq X$ en $B \subseteq X$. Bewijs dat
$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$$

Opgave 5. In deze opgave bewijs je stapsgewijs de zogeheten *driehoeksongelijkheid* (op de lijn), die zegt dat:
$$\text{voor alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ geldt } |x + y| \leq |x| + |y|.$$
(a) Overtuig degene naast je dat de driehoeksongelijkheid waar is.
(b) Bewijs: voor alle $z \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, als $-a \leq z \leq a$, dan $|z| \leq a$.
(c) Bewijs: voor alle $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$.
(d) Combineer (b) en (c) om de driehoeksongelijkheid te bewijzen.

Opgave 6. (a) Bewijs dat, voor alle $x, y \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$.
(b) Leg met een schets uit waarom de ongelijkheid in (a) de *driehoeksongelijkheid* (in het vlak) heet.

Huiswerk 1

Opgave 1. Zijn x en y gehele getallen. Bewijs: als $x + y$ oneven is, dan is x of y oneven.

Opgave 2. Bewijs dat $\sqrt{5}$ geen rationaal getal is.

Opgave 3. Zijn A, B, C verzamelingen. Bewijs dat $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Werkcollege 3

Opgave 1. Twee verzamelingen X en Y heten **disjunct** van elkaar als $X \cap Y = \varnothing$. Het **symmetrisch verschil** van twee verzamelingen A en B is gedefinieerd als de verzameling $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
(a) Schets in een Venn diagram de verzamelingen $A \cap B$ en $A \triangle B$.
(b) Bewijs dat de verzamelingen $A \triangle B$ en $A \cap B$ altijd disjunct van elkaar zijn.

Opgave 2. In deze opgave is het universum $\mathbb{R}$.
(a) Voor $n \in \mathbb{Z}$ definiëren we $A_n = (n - 1, n)$. Bewijs dat $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
(b) Welk(e) element(en) bevat de verzameling $\bigcap_{n=1}^{\infty} (2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$? Bewijs je bewering.
(c) Geef een collectie open intervallen $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ zo dat $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = [0, 1]$. Leg je antwoord met een tekening uit.

Opgave 3. Neem $A = \{0, \mathbb{N}, 2\}$ en $B = \{A, 3\}$. Welke van de volgende beweringen zijn waar? Leg uit.

(a) $\mathbb{N} \in A$	(d) $A \in B$	(g) $B \in \mathscr{P}(B)$
(b) $\mathbb{N} \subseteq A$	(e) $A \subseteq B$	(h) $\varnothing \subseteq A$
(c) $\mathbb{N} \in \mathscr{P}(A)$	(f) A en B zijn disjunct	(i) $\varnothing \in \mathscr{P}(B)$

Opgave 4. Maak nauwkeurige tekeningen van de volgende verzamelingen in $\mathbb{R}^2$:
(a) $[0, 1] \times \mathbb{R}$
(b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
(c) De verzamelingen $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 16\}$, $L = \{(x, 2x - 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, en $P \cap L$.

Opgave 5. Zijn A, B, C, D verzamelingen met $C \subseteq A$ en $D \subseteq B$. Welke van de volgende beweringen is waar? Geef voor elke bewering een bewijs of tegenvoorbeeld.
(a) $(A \setminus C) \times (B \setminus D) \subseteq (A \times B) \setminus (C \times D)$
(b) $(A \setminus C) \times (B \setminus D) \supseteq (A \times B) \setminus (C \times D)$

Opgave 6. Zij X een verzameling, en $(A_i)_{i \in I}$ een collectie deelverzamelingen van X, geïndexeerd door een niet-lege verzameling I. Bewijs dat
$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

Opgave 7. Toon aan dat $A \subseteq B$ dan en slechts dan als $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$.

Werkcollege 4

Opgave 1. Ga in elk onderdeel eerst na dat de gelijkheid geldt in de gevallen $n = 1, 2, 3$, en bewijs de gelijkheid vervolgens met inductie voor alle $n \geq 1$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{2n+4}$,

(c) voor alle $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Opgave 2. Bewijs dat $2^n \leq n!$ voor alle $n \geq 4$.

Opgave 3. In het hoorcollege is met inductie bewezen dat er een betegeling met triomino's (d.w.z, drie blokjes in L-vorm) bestaat van een vierkant van $2^n \times 2^n$ blokjes met één hoek-blokje eruit.

(a) Volg het inductie-bewijs uit het hoorcollege om een betegeling te vinden voor een 8×8 vierkant met één hoekje eruit.

(b) Definieer $a_1 := 1$ en $a_{n+1} = 4a_n + 1$. Leg aan de hand van het inductie-bewijs uit het hoorcollege uit dat a_n het aantal benodigde triomino's voor een $2^n \times 2^n$ vierkant is.

(c) Bewijs *zonder inductie* dat, voor alle $n \geq 1$, $3a_n + 1 = 4^n$.

Opgave 4. Zij n een natuurlijk getal en k een natuurlijk getal zodat $0 \leq k \leq n$. We gebruiken de volgende notatie: $\displaystyle\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\mathscr{P}_k(X) := \{A \in \mathscr{P}(X) \mid \#A = k\}$, waar X een eindige verzameling is, $[n] := \{1, \ldots, n\}$ als $n \geq 1$, en $[0] := \varnothing$.

(a) Laat door breuken op te tellen zien dat, als $k < n$, dan

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(b) Bewijs dat, als $k < n$, dan

$$\mathscr{P}_{k+1}([n+1]) = \mathscr{P}_{k+1}([n]) \cup \{A \cup \{n+1\} \mid A \in \mathscr{P}_k([n])\}.$$

(c) Gebruik inductie en de voorgaande onderdelen om aan te tonen dat $\#\mathscr{P}_k([n]) = \binom{n}{k}$.

(d) Leg met behulp van (c) uit waarom, voor alle $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.*

Opgave 5. Zij $n \geq 1$ en $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$. In deze opgave bewijzen we dat *het gemiddelde van de getallen $1/a_i$ groter of gelijk is aan 1 gedeeld door het gemiddelde van de getallen a_i.*†

(a) Laat zien dat, voor alle $x \in \mathbb{R}^+$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

(b) Laat met behulp van inductie en (a) zien dat, voor alle $b \in \mathbb{R}^+$,

$$b \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} + \frac{1}{b} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \geq 2n.$$

(c) Bewijs met behulp van inductie en (b) dat

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2.$$

(d) Leid uit (c) de schuingedrukte uitspraak bovenaan de opgave af.

---

*Dit heet het **binomium van Newton**.

†Dit is een speciaal geval van de zogeheten **ongelijkheid van Jensen** uit de stochastiek.

Huiswerk 2

Opgave 1. Zij $(A_i)_{i\in I}$ een collectie verzamelingen geïndexeerd door een verzameling I, en zij B een verzameling. Bewijs dat

$$B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i \right) = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i).$$

Opgave 2. Bewijs met inductie dat, voor alle $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \tfrac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$

Opgave 3. Bewijs dat

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

Werkcollege 5

Opgave 1. Geef een voorbeeld van een relatie op de verzameling $\{1, 2, 3\}$ die ...

(a) niet transitief is maar wel reflexief;
(b) transitief en symmetrisch is maar niet reflexief;
(c) reflexief en symmetrisch is maar niet transitief.

Opgave 2. Leg voor elk van de volgende relaties uit of de relatie een functie is. Zo ja, geef dan het domein, het codomein, en het bereik van de functie.

(a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 1\}$
(b) $R_2 = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\})^2 \ : \ y = x^2 + 3\}$
(c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$
(d) $R_4 = \{(U, V) \in \mathscr{P}(\mathbb{N})^2 \ : \ U = \mathbb{N} \setminus V\}$.

Opgave 3. Laat $\sim$ de relatie op $\mathbb{R}$ gedefinieerd door $x \sim y$ dan, en slechts dan, als $xy \geq 0$. Is de relatie $\sim$ een equivalentierelatie op $\mathbb{R}$? Leg uit.

Opgave 4. Definieer de relaties R en S op $\mathbb{N}$ als volgt:

$$R := \{(n, m) \ : \ n, m \in \mathbb{N} \text{ en } n < m\}, \quad S := \{(n, n+1) \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Is R en/of S een functie? Leg uit.
(b) Is R en/of S transitief? Leg uit.
(c) Stel dat T een transitieve relatie is en dat $S \subseteq T$. Bewijs dat dan ook $R \subseteq T$.
Hint. Bewijs dat, voor alle $k \geq 1$, als $(n, m) \in R$ en $m - n = k$, dan $(n, m) \in T$.

Opgave 5. Definieer op de verzameling $\mathbb{Z}$ de relatie $\sim$ door $x \sim y$ desda $5 \mid (x - y)$.

(a) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
(b) Beschrijf de equivalentieklassen van 0, van 2 en van -3.
(c) Hoeveel verschillende equivalentieklassen zijn er? Beschrijf ze kort.

Opgave 6. Zij X een verzameling en zij $(R_i)_{i\in I}$ een collectie relaties op X. Definieer een nieuwe relatie R op X door $R := \bigcap_{i\in I} R_i$, de doorsnede van de relaties R_i.

(a) Bewijs dat de relatie R reflexief is dan, en slechts dan, als voor alle $i \in I$, de relatie R_i reflexief is.
(b) Stel dat voor alle $i \in I$ de relatie R_i transitief is. Bewijs dat R transitief is.
(c) Stel dat voor alle $i \in I$ de relatie R_i een equivalentierelatie is. Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

Werkcollege 6

Opgave 1. Definieer op de verzameling $\mathbb{Z}$ de relatie $\sim$ door $x \sim y$ desda $5 \mid (x - y)$. Uit opgave 5(a) van Werkcollege 5 volgt dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

Geef twee verschillende volledige stelsels representanten voor deze equivalentierelatie.

Opgave 2. Definieer op $\mathbb{R}$ de relatie $x \sim y$ desda $|x| = |y|$.

(a) Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
(b) Beschrijf de partitie van $\mathbb{R}$ geïnduceerd door $\sim$.

Opgave 3. Definieer op $\mathbb{R}^2$ de relatie $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ desda $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.
(a) Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
(b) Beschrijf de equivalentieklassen van $(1, 0)$ en van $(-3, 4)$.
(c) Beschrijf en/of schets de partitie van $\mathbb{R}^2$ geïnduceerd door $\sim$.

Opgave 4. Zij X een verzameling en zijn R en S equivalentierelaties op X. Uit opgave 6(c) van Werkcollege 5 volgt dat $R \cap S$ ook een equivalentierelatie op X is.

Laat nu $\mathscr{A}$ de partitie van X geïnduceerd door R zijn, en $\mathscr{B}$ de partitie geïnduceerd door S. Bewijs dat de partitie geïnduceerd door $R \cap S$ gelijk is aan

$$\{A \cap B \ : \ A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B} \text{ en } A \cap B \neq \emptyset\}.$$

Opgave 5. Definieer, voor $n \in \mathbb{N}^+$, de verzameling $\Pr(n) = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ is een priemgetal en } p \mid n\}$. Definieer op $\mathbb{N}^+$ de relatie $m \sim n$ desda $\Pr(m) = \Pr(n)$.
(a) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
(b) Beschrijf de equivalentieklassen van 2 en van 12.
(c) Beschrijf een volledig stelsel representanten voor deze equivalentierelatie.
(d) Bewijs dat $m \sim n$ desda er $k, \ell \in \mathbb{N}$ bestaan zo dat $m \mid n^k$ en $n \mid m^\ell$.

Hint. Je mag zonder bewijs het feit gebruiken dat, als een macht n^k deelbaar is door een priemgetal p, dat dan ook n zelf deelbaar is door p. Gebruik verder het al in het hoorcollege bewezen feit dat ieder natuurlijk getal een product van priemgetallen is.

Huiswerk 3

Opgave 1. Bekijk de volgende relatie, R, op $\mathbb{Z}$:

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x - y^2 = 0\}.$$

Is R een functie? Is R een equivalentierelatie? Leg je antwoorden uit.

Opgave 2. Zijn X en Y niet-lege verzamelingen, $\mathscr{A}$ een partitie van X, en $\mathscr{B}$ een partitie van Y. Bewijs dat $\{A \times B : A \in \mathscr{A} \text{ en } B \in \mathscr{B}\}$ een partitie van $X \times Y$ is.

Opgave 3. Definieer de relatie $\sim$ op $\mathbb{R}$ door $x \sim y$ desda $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.
Herinner: voor $z \in \mathbb{R}$ is $\lfloor z \rfloor$ het grootste gehele getal kleiner gelijk z.
Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is en geef een volledig stelsel representanten voor $\sim$.

Werkcollege 7

Opgave 1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \cos x$. Bepaal de volgende verzamelingen:

(a) $f(\mathbb{R})$
(b) $f^{-1}(\mathbb{R})$
(c) $f\big([0, 2\pi)\big)$
(d) $f\big([0, \pi)\big)$
(e) $f^{-1}\big([0, 1]\big)$
(f) $f^{-1}\big([2, 3]\big)$.

Opgave 2. (a) Vind de grootste deelverzameling D van $\mathbb{R}$ zo dat de relatie

$$f = \big\{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \ : \ x = (x^2 - 3x - 10)y + 1\big\}$$

een functie is.
(b) Is de functie $f : D \to \mathbb{R}$ injectief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
(c) Is de functie $f : D \to \mathbb{R}$ surjectief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 3. Zij $f : X \to Y$ een functie en zijn $A, B \subseteq X$ deelverzamelingen.
(a) Bewijs dat $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
(b) Geldt ook $f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
(c) Stel nu dat f injectief is. Bewijs dat $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Opgave 4. Zijn X en Y eindige[‡] niet-lege verzamelingen en zij $f : X \to Y$ een surjectieve functie.
(a) Bewijs dat er een functie $g : Y \to X$ bestaat zo dat $f \circ g = i_Y$.
(b) Is er een *unieke* functie $g : Y \to X$ zo dat $f \circ g = i_Y$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
(c) Bewijs dat elke functie $g : Y \to X$ zo dat $f \circ g = i_Y$ injectief is.

Opgave 5. Voor elk natuurlijk getal $k \geq 2$ definiëren we de relatie *congruentie modulo* k, voor $x, y \in \mathbb{Z}$, door

$$x \sim_k y \iff x - y \text{ is deelbaar door } k.$$

We schrijven $\mathbb{Z}_k$ voor $\mathbb{Z}/{\sim_k}$, i.e., de partitie geïnduceerd door $\sim_k$.

Bekijk nu de functie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ gedefinieerd door $f(x) = ([x]_{\sim_2}, [x]_{\sim_3})$.

(a) Laat zien dat $f(0) = f(6)$ en dat $f(8) = f(14)$.
(b) Bewijs dat, voor alle $x, y \in \mathbb{Z}$, $f(x) = f(y)$ dan, en slechts dan, als $x \sim_6 y$.
(c) Bewijs dat er een unieke functie $\overline{f}\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ bestaat zo dat $\overline{f}([x]_{\sim_6}) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{Z}$.
(d) Bewijs dat de functie $\overline{f}$ in (c) injectief en surjectief is.

Opgave 6. Zijn $f\colon X \to Y$ en $g\colon Y \to Z$ functies.

(a) Bewijs dat, als f en g injectief zijn, dat dan ook $g \circ f$ injectief is.
(b) Bewijs dat, als $g \circ f$ surjectief is, dat dan ook g surjectief is.

Werkcollege 8

Opgave 1. Zijn $f\colon X \to Y$ en $g\colon Y \to Z$ bijectieve functies.

(a) Bewijs dat f^{-1} bijectief is, en dat $(f^{-1})^{-1} = f$.
(b) Bewijs dat $g \circ f$ bijectief is, en dat $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Opgave 2. Laat zien dat elk van de volgende functies bijectief is, door de inverse te beschrijven.

(a) $f\colon (0,1) \to (1,\infty)$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$.
(b) $g\colon (-\infty, 0] \to [0,\infty)$ gegeven door $g(x) = x^2$.
(c) $h\colon \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\} \to [0, 2\pi)$, gegeven door $h(x,y) =$ de lengte van het pad van (x,y) naar $(1,0)$, op de cirkel met de klok mee.

Opgave 3. (a) Bewijs dat, voor iedere $k \in \mathbb{N}$, de verzameling

$$\mathscr{P}_k(\mathbb{N}) := \{S \subseteq \mathbb{N} \ : \ \#S = k\}$$

aftelbaar is.

(b) Bewijs dat de verzameling $\{S \subseteq \mathbb{N} : S \text{ is eindig}\}$ aftelbaar is.

Opgave 4. Bewijs dat de verzameling $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ niet aftelbaar is.

Hint. Gebruik een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ een surjectieve functie is, en bekijk de functie $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ gedefinieerd door $f(n) = F(n)(n) + 1$.

Opgave 5. Zij X een verzameling. Voor elke deelverzameling $S \subseteq X$ definiëren we de functie $f_S\colon X \to \{0,1\}$ als

$$f_S = \{(x,1) \ : \ x \in S\} \cup \{(x,0) \ : \ x \notin S\}.$$

Herinner dat $\{0,1\}^X$ een notatie is voor de verzameling van functies van X naar $\{0,1\}$. Definieer de functie $F\colon \mathscr{P}(X) \to \{0,1\}^X$ door $F(S) := f_S$.

(a) Leg uit waarom f_S inderdaad een functie is voor elke $S \subseteq X$.
(b) Bewijs dat F een bijectie is en geef F^{-1}.

Huiswerk 4

Opgave 1. Voor welke waarden van $a, b \in \mathbb{R}$ is de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = ax + b$ bijectief? Bewijs je bewering en geef een formule voor f^{-1}.

Opgave 2. Zij $f\colon X \to Y$ een functie. Bewijs dat voor alle deelverzamelingen $A, B \subseteq X$ geldt dat $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Opgave 3. Zij X een verzameling met $\#X \geq 2$. Bewijs dat er geen surjectieve functie bestaat van $\mathbb{N}$ naar $X^{\mathbb{N}}$.

---

‡Als X en Y *willekeurige* (mogelijk oneindige) niet-lege verzamelingen zijn en $f\colon X \to Y$ is een surjectieve functie, dan lijkt het intuïtief ook duidelijk dat er, zoals in (a), een $g\colon Y \to X$ bestaat zo dat $f \circ g = i_Y$. Deze uitspraak is echter equivalent aan het enigszins omstreden *keuze-axioma* (Engels: 'axiom of choice').

Werkcollege 9

Opgave 1. Herinner uit het hoorcollege dat $\mathbb{Q}$ gedefinieerd is als het quotiënt van $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ onder de equivalentierelatie $(a, b) \sim (c, d)$ desda $ad = bc$, en dat de notatie $\frac{a}{b}$ betekent $[(a, b)]_\sim$.

(a) Bewijs dat, als $(a_1, b_1) \sim (c_1, d_1)$ en $(a_2, b_2) \sim (c_2, d_2)$, dan ook $(a_1a_2, b_1b_2) \sim (c_1c_2, d_1d_2)$.
(b) Leg uit waarom uit (a) volgt dat vermenigvuldiging op $\mathbb{Q}$ welgedefinieerd is.

Opgave 2. Vereenvoudig elk van de volgende uitdrukkingen tot de vorm $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$, en vind vervolgens de modulus.

(a) $(5 - 6i) + (3 + 2i)$,
(b) $(3i - 5)(2 + 2i)$,
(c) $\dfrac{i - 4}{2i - 3}$,
(d) $i^5 + i + 1$,
(e) $\dfrac{1 + i}{1 - i} - \overline{(1 - 2i)}(2 + 2i) + \dfrac{3 - i}{1 + i}$.

Opgave 3. Bewijs dat, voor alle $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$,
(b) $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}$.

Opgave 4. (a) Vind getallen $b, c \in \mathbb{R}$ zo dat $z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 + bz + c)$.
(b) Vind de drie getallen $z \in \mathbb{C}$ zo dat $z^3 + 8 = 0$.

Opgave 5. Herinner dat $\sim_4$ de relatie 'congruentie modulo 4' is: $n \sim_4 k$ desda $n - k$ is deelbaar door 4. Bewijs dat, voor alle $n \geq 0$:

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{als } n \sim_4 0 \\ i & \text{als } n \sim_4 1 \\ -1 & \text{als } n \sim_4 2 \\ -i & \text{als } n \sim_4 3. \end{cases}$$

Opgave 6. Zij $n \geq 0$ en $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ een polynoom *met reële coëfficiënten*, dus $a_i \in \mathbb{R}$ voor alle $0 \leq i \leq n$.

(a) Stel dat $z_0 \in \mathbb{C}$ met $p(z_0) = 0$. Bewijs dat $p(\overline{z_0}) = 0$.
(b) Stel nu dat $n = 2$, dus $p(z)$ is een kwadratisch polynoom met reële coëfficiënten. Bewijs met behulp van (a) dat, als $p(z)$ een reëel nulpunt heeft, dat dan alle nulpunten van $p(z)$ reëel zijn.

Werkcollege 10

Opgave 1. Teken elk van de volgende complexe getallen z in het complexe vlak, en vind een waarde $r \in \mathbb{R}^+$ en $\phi \in [0, 2\pi)$ zo dat $re^{i\phi} = z$.

(a) $z = -10 + 10i$,
(b) $z = 1 - \sqrt{3}i$,
(c) $z = -4i$,
(d) $z = -3$.

Opgave 2. Stel dat $z = re^{i\phi}$. Druk de volgende complexe getallen uit in termen van r en ϕ, en bewijs je bewering:

(a) $\overline{z}$,
(b) z^2,
(c) $\dfrac{1}{z}$.

Opgave 3. Bekijk de afbeelding $f \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeven door $f(z) = 1/z$.

(a) Is f injectief? Surjectief? Bewijs je antwoord.
(b) Zij $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. Teken B in het complexe vlak.
(c) Bepaal $f^{-1}(B)$.

Opgave 4. Zij $\phi \in \mathbb{R}$. In deze opgave gebruiken we Euler's formule om de trigonometrische identiteiten $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)$ en $\sin(2\phi) = 2\sin(\phi)\cos(\phi)$ te bewijzen.

(a) Geef een uitdrukking voor het kwadraat van $e^{i\phi}$ door eerst Euler's formule toe te passen, en dan te kwadrateren.
(b) Geef een andere uitdrukking voor het kwadraat van $e^{i\phi}$ door eerst te kwadrateren, en dan Euler's formule toe te passen.
(c) Leid de trigonometrische identiteiten af door de reële en imaginaire delen van (a) en (b) te vergelijken.

Opgave 5. Bewijs met behulp van Euler's formule dat, voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\phi \in \mathbb{R}$ geldt

$$(\cos(\phi) + i\sin(\phi))^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi).$$

Dit heet *de Moivre's formule.*

Opgave 6. Herinner dat $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ gedefinieerd is als de inverse functie van $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$. Zij $z = a + bi$ een complex getal. Definieer $r := |z|$.

(a) Stel $a > 0$. Vind een formule, met behulp van arctan, voor een $\phi \in [0, 2\pi)$ zo dat $re^{i\phi} = z$, en bewijs dat je formule correct is.
 Hint. Onderscheid de gevallen $b \geq 0$ en $b < 0$.
(b) Stel nu $a < 0$. Vind weer een formule, met behulp van arctan, voor een $\phi \in [0, 2\pi)$ zo dat $re^{i\phi} = z$, en bewijs dat je formule correct is.
(c) Als $a = 0$, hoe vind je dan $\phi \in [0, 2\pi)$ zo dat $re^{i\phi} = z$?

Huiswerk 5

Opgave 1. Bekijk het polynoom $p(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (5+4i)z - 5i$.

(a) Laat zien dat $p(i) = 0$.
(b) Vind $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ zo dat $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.

Opgave 2. Geef de zes oplossingen van de vergelijking $z^6 - 64 = 0$ in de vorm $re^{i\phi}$, en teken ze in het complexe vlak.

Opgave 3. Bewijs dat, voor alle $z, w \in \mathbb{C}$, $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Werkcollege 11

Opgave 1. Zijn $a, b \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Bewijs dat $n \mid \text{ggd}(a, b)$ dan en slechts dan als $n \mid a$ en $n \mid b$.

Opgave 2. Bepaal met behulp van het algoritme van Euclides de grootste gemene deler van a en b, en schrijf $\text{ggd}(a, b)$ als lineaire combinatie van a en b.

(a) $a = 374$, $b = 946$.
(b) $a = 51$, $b = 288$.

Opgave 3. Zij p een priemgetal. Bewijs dat, voor ieder geheel getal a,

$$\text{ggd}(p, a) = \begin{cases} p & \text{als } p \mid a, \\ 1 & \text{als } p \nmid a. \end{cases}$$

Opgave 4. Zijn $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, en definieer $d := \text{ggd}(a, b)$, $\alpha := \dfrac{a}{d}$ en $\beta := \dfrac{b}{d}$.

(a) Leg uit waarom α en β gehele getallen zijn.
(b) Bewijs dat α en β copriem zijn.

Opgave 5. Bewijs dat, voor alle gehele getallen a, b, c met $a \neq 0$ en $b \neq 0$, als a en b copriem zijn, $a \mid c$ en $b \mid c$, dan geldt $ab \mid c$.

Opgave 6. Bewijs dat, voor alle natuurlijke getallen $a, b, n \geq 1$, als $a^n \mid b^n$ dan $a \mid b$.

Opgave 7. Bewijs met behulp van inductie en het lemma van Euclides dat, als p een priemgetal is en $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ zo dat $p \mid \prod_{i=1}^n a_i$, dan $p \mid a_i$ voor zekere $1 \leq i \leq n$.

Werkcollege 12

Opgave 1. Laat zien dat machtsverheffen *niet* welgedefinieerd is op $\mathbb{Z}_n$. Dat wil zeggen, vind $n \geq 2$ en gehele getallen a, b, c, d zo dat $a \sim_n b$, $c \sim_n d$, maar $a^c \not\sim_n b^d$.

Opgave 2. Zij n een natuurlijk getal en zijn $n_0, \ldots, n_k \in \{0, \ldots, 9\}$ de cijfers van n in basis 10, dus $n = \sum_{i=0}^{k} n_i 10^i$. Dan geldt: $11 \mid n$ dan en slechts dan als de alternerende som van de cijfers van n, $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i n_i = n_0 - n_1 + n_2 - \cdots n_k$, deelbaar is door 11.

(a) Ga na dat de bewering klopt voor $n = 3281927$.
(b) Bewijs de bewering.

Opgave 3. (a) Welke klassen in $\mathbb{Z}_{10}$ zijn inverteerbaar?
(b) Vind voor elk van de inverteerbare klassen de inverse klasse.
(c) Bewijs: als n een getal waarvan het laatste cijfer oneven is maar ongelijk aan 5, dan is $n^4 - 1$ deelbaar door 10.

Opgave 4. (a) Laat zien dat een geheel getal a onderling ondeelbaar is met 100 dan en slechts dan als $2 \nmid a$ en $5 \nmid a$.
(b) Bewijs dat $\phi(100) = 40$.
(c) Bepaal de laatste twee cijfers van de getallen 31^{41} en 79^{80}.

Opgave 5. Zij p een priemgetal.

(a) Bewijs dat, als $a_1, \ldots, a_n$ natuurlijke getallen kleiner dan p zijn, dan $p \nmid a_1 \cdots a_n$.
(b) Bewijs dat, voor alle $1 \leq k \leq p - 1$, $p \mid \binom{p}{k}$.
Hint. Gebruik het Lemma van Euclides, onderdeel (a), en het feit dat $p! = \binom{p}{k} \cdot k!(p-k)!$.
(c) Bewijs zonder de kleine stelling van Fermat te gebruiken dat voor alle gehele getallen a, b geldt

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \mod p.$$

(d) Hoe kun je de gelijkheid in (c) snel bewijzen met de kleine stelling van Fermat?

Opgave 6. Zij p een priemgetal en $k \geq 1$ een natuurlijk getal.

(a) Bewijs dat, voor ieder geheel getal a, $\text{ggd}(a, p^k) = 1$ dan en slechts dan als $p \nmid a$.
(b) Bewijs dat $\#\{a \in \mathbb{N} : a \leq p^k \text{ en } p \mid a\} = p^{k-1}$.
(c) Bewijs dat $\phi(p^k) = p^k \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$.

Huiswerk 6

Opgave 1. (a) Bepaal $\text{ggd}(26064, 3672)$.
(b) Schrijf $\text{ggd}(26064, 3672)$ als lineaire combinatie van 26064 en 3672.
(c) Geef de unieke ontbinding van $\text{ggd}(26064, 3672)$ in priemgetallen.

Opgave 2. Zijn p en q priemgetallen, $p \neq q$. Bewijs dat voor alle positieve gehele getallen k, ℓ geldt $\text{ggd}(p^k, q^\ell) = 1$.

Opgave 3. Zij n een natuurlijk getal. Bewijs dat $9 \mid n$ dan en slechts dan als de som van de cijfers van n deelbaar is door 9.

Werkcollege 13

Opgave 1. Laat $p = 7$, $q = 11$, $n = 77$ en $e = 13$.

(a) Bereken de RSA codering C van het bericht $B = 2$ voor de publieke sleutel (n, e).
Herinner: C is de rest van B^e bij deling door n.
(b) Gebruik p en q om $\phi(n)$ te berekenen.
(c) Vind een decoderingssleutel, dat wil zeggen een getal $0 \leq d < \phi(n)$ zodat $de \equiv 1 \mod \phi(n)$.
(d) Ga na dat, voor de code C berekend in (a), inderdaad geldt $C^d \equiv B \mod n$.

Opgave 2. We volgen het bewijs van de Stelling van Euler in het geval $n = 12$. We schrijven in deze opgave $[a]$ in plaats van $[a]_{12}$.

(a) Ga na dat de functie $f_{17} \colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ gegeven door $f_{17}([a]) := [17a]$ welgedefinieerd en bijectief is. Wat is de functie $(f_{17})^{-1}$?

(b) Laat zien dat $[1][5][7][11] = [11]$. Wat is de multiplicatieve inverse van $[11]$?
(c) Schrijf $[17^4][1][5][7][11] = [17][1] \cdot [17][5] \cdot [17][7] \cdot [17][11]$, en beredeneer met behulp van (a) en (b) waarom dit gelijk moet zijn aan $[11]$.
(d) Vermenigvuldig beide kanten in (c) met de multiplicatieve inverse van $[11]$, en concludeer hieruit, zonder 17^4 te hoeven berekenen, dat $[17^4] = [1]$.
(e) Wat zou er mis gaan als je in bovenstaande redenering 17 vervangt door 18?
(f) Laat zonder rekenmachine zien dat $18^4 \not\equiv 1 \mod 12$.

Opgave 3. Deze opgave laat zien dat de restklasse van m^e modulo n snel te berekenen is. Stel dat $e = 2^{16}$, en dat de getallen m en n uit 600 cijfers bestaan.

(a) Laat zien dat je m^e kunt berekenen door 16 keer twee getallen met elkaar te vermenigvuldigen.
(b) Het vermenigvuldigen of uitvoeren van deling met rest van twee getallen die uit ℓ cijfers bestaan, kost een computer minder dan ℓ^2 bit-operaties. Laat zien dat je de restklasse van m^e modulo n kunt berekenen met hoogstens $32 \times 600^2 \approx 1.2 \times 10^7$ bit-operaties.
(c) Een moderne computer kan minstens 10^{10} bit-operaties per seconde uitvoeren. Hoe lang duurt het bepalen van de restklasse van m^e modulo n hoogstens?

Opgave 4 (Extra, geen tentamenstof)**.** Zijn m, n natuurlijke getallen ≥ 2 zo dat $\text{ggd}(m, n) = 1$. Definieer $f : \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ door $f([a]_{mn}) := ([a]_m, [a]_n)$.

(a) Bewijs dat f welgedefinieerd en injectief is. Waarom moet f dan wel bijectief zijn?
(b) Laat k en ℓ gehele getallen zo dat $km + \ell n = 1$. Zij $([a]_m, [b]_n) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, en definieer $x := bkm + a\ell n$. Bewijs dat $f([x]_{mn}) = ([a]_m, [b]_n)$.
(c) Bewijs dat $a \equiv 1 \mod mn$ dan en slechts dan als $a \equiv 1 \mod m$ en $a \equiv 1 \mod n$.
(d) Bewijs dat $[a]_{mn}$ inverteerbaar is dan en slechts dan als $[a]_m$ en $[a]_n$ inverteerbaar zijn.

Opgave 5 (Extra, geen tentamenstof)**.** (a) Bewijs met behulp van de vorige opgave dat $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ als m en n onderling ondeelbaar zijn.

(b) Zij n een natuurlijk getal en stel dat $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ voor priemgetallen $p_1 < \cdots < p_m$ en natuurlijke getallen $k_1, \ldots, k_m$. Bewijs met behulp van (a) en het feit dat $\phi(p^k) = p^k(1 - \frac{1}{p})$ dat:
$$\phi(n) = p_1^{k_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots p_m^{k_m}\left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$
(c) Bewijs met behulp van de hoofdstelling van de rekenkunde en (b) dat, voor alle $n \geq 2$,
$$\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{p \text{ priemdeler van } n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$
(d) Gebruik de formule in (c) om $\phi(1000)$ te berekenen. Wat is een algemene formule voor $\phi(10^k)$, $k \geq 1$?